ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

ЕГЭ

Единый государственный экзамен ЕГЭ

Л.И. СЛОНИМСКИЙ, И.С. СЛОНИМСКАЯ

МАТЕМАТИКА

в таблицах и схемах

для подготовки

к ЕГЭ

НОВОЕ ИЗДАНИЕ!

ЕГЭ – ШКОЛЬНИКАМ И УЧИТЕЛЯМ

Л. И. Слонимский
И. С. Слонимская

МАТЕМАТИКА

В ТАБЛИЦАХ И СХЕМАХ

для подготовки

к **ЕГЭ**

Слонимский, Лев Иосифович.

Математика в таблицах и схемах : для подготовки к ЕГЭ / Л.И. Слонимский, И.С. Слонимская. — Москва

(Новая школьная программа)

(Подготовка к единому государственному экзамену)

Справочник содержит материал курса «Математика» в объёме, проверяемом на едином государственном экзамене.

Структура книги соответствует современному кодификатору элементов содержания по предмету, на основе которого формируются экзаменационные задания.

Наглядность и доступность подачи материала в табличной форме позволяет легко и быстро обобщить, систематизировать и повторить материал школьного курса математики и успешно подготовиться к сдаче ЕГЭ.

Содержание

1. АЛГЕБРА

1.1. Числа и вычисления

1.1.1. Числа

Цифры — знаки для записи чисел.

В десятичной системе счисления используют цифры: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Всего 10 цифр.

→ **Натуральные числа N** — числа, которые используют при счёте предметов.

Например, 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 и т.д.

→ **Целые числа Z** — натуральные числа, противоположные им и нуль.

Например, –100; –5; –1; 0; 2; 17 и т.д.

→ **Рациональные числа Q** — числа, которые можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное, или в виде конечной либо бесконечной периодической десятичной дроби.

Например, $-6 = -\frac{6}{1}$; $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}$; $\frac{1}{3} = 0,(3)$.

→ **Иррациональные числа** — числа, которые можно записать приближенно с помощью бесконечной непериодической десятичной дроби.

Например, $\sqrt{2} \approx 1,4142\ldots$; $\pi \approx 3,14\ldots$.

→ **Действительные числа R** — рациональные и иррациональные числа.

1.1.2. Арифметические действия и их свойства

Действия над натуральными числами	
Сложение	$a + b = c$, $a = c - b$, $b = c - a$, где a — слагаемое, b — слагаемое, c — сумма
Вычитание	$a - b = c$, $a = b + c$, $b = a - c$, где a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность
Умножение	$ab = c$, $a = \frac{c}{b}$, $b = \frac{c}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, где a — множитель, b — множитель, c — произведение
Деление	$\frac{a}{b} = c$ или $a : b = c$, $a = bc$, $b = \frac{a}{c}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, где a — делимое, b — делитель, c — частное

Свойства сложения и умножения	
Переместительное свойство сложения	$a + b = b + a$
Сочетательное свойство сложения	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Переместительное свойство умножения	$ab = ba$
Сочетательное свойство умножения	$(ab)c = a(bc)$
Распределительное свойство умножения относительно сложения	$a(b + c) = ab + ac$

Общие правила при действиях с 0 и 1
$a + 0 = a$
$a - 0 = a$
$a - a = 0$
$a \cdot 1 = a$
$a : 1 = a$
$a : a = 1$
$a \cdot 0 = 0$
$0 : a = 0$
$a : 0$ — нет числового решения

Проверка результатов арифметических действий с помощью остатков от деления на 9
Действия
• Остаток любого числа от деления на 9 можно получить, складывая цифры числа, при этом в полученной сумме нужно продолжить сложение цифр до получения однозначного остатка. При сложении цифр суммы и отдельные числа, кратные 9, а также нуль можно игнорировать, они не влияют на конечный результат. • Умножаем или складываем остатки множителей или слагаемых и сравниваем их с остатком суммы или произведения. При верном решении они должны совпадать. • При делении и вычитании проверку этим способом можно производить, умножая остаток частного на остаток делителя, соответственно, складывая остаток разности с остатком вычитаемого.

Примеры:	
1) $44 \cdot 46 = 2024$. $4 + 4 = 8$; $4 + 6 = 10 \to$ $\to 1 + 0 = 1$; $2 + 0 + 2 + 4 = 8$; $8 \cdot 1 = 8$ (верно)	2) $327 + 48 = 375$. $3 + 2 + 7 = 12 \to 1 + 2 = 3$; $4 + 8 = 12 \to 1 + 2 = 3$; $3 + 7 + 5 = 15 \to 1 + 5 = 6$; $3 + 3 = 6$ (верно)
3) $156 : 12 = 13 \to$ $\to 13 \cdot 12 = 156$. $1 + 3 = 4$; $1 + 2 = 3$; $1 + 5 + 6 = 12 \to$ $\to 1 + 2 = 3$; $4 \cdot 3 = 12 \to 1 + 2 = 3$ (верно)	4) $58 - 22 = 36 \to$ $\to 36 + 22 = 58$. $3 + 6 = 9$; $2 + 2 = 4$; $5 + 8 = 13 \to 1 + 3 = 4$; $9 + 4 = 13 \to 1 + 3 = 4$ (верно)

Приёмы быстрого устного счёта	
Умножение чисел от 101 до 109 между собой $(100 + a)(100 + b) = 10\,000 + 100(a + b) + ab$	
Порядок действий	*Примеры*
1) Записываем число 1. 2) Справа записываем сумму чисел из разряда единиц у множителей. 3) Ещё правее записываем произведение этих же чисел.	1) $102 \cdot 104 = 10\,000 + 100(2 + 4) + 2 \cdot 4 = 10\,000 + 600 + 8 = 10\,608$. 2) $109 \cdot 108 = 10\,000 + 100(9 + 8) + 9 \cdot 8 = 10\,000 + 1700 + 72 = 11\,772$.
Умножение чисел, бóльших 10 $(10 + a)(10 + b) = 10(10 + a + b) + ab$	

Порядок действий	*Примеры*
1. К одному из множителей прибавляем единицы второго множителя, получаем десятки. 2. Перемножаем единицы. 3. Складываем десятки с произведением единиц.	1) $12 \cdot 19 = 10(10 + 2 + 9) + 2 \cdot 9 = 210 + 18 = 228$ 2) $16 \cdot 13 = 10(10 + 6 + 3) + 6 \cdot 3 = 190 + 18 = 208$

Умножение чисел с одинаковыми десятками и числом единиц, дающих в сумме 10

$(1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 10)$

• *Десятки* умножаем на следующее натуральное число: $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $5 \cdot 6$; $9 \cdot 10$; $11 \cdot 12$.

• *Единицы* просто перемножаем (если в произведении получилось однозначное число, то слева приписываем 0):
$1 \cdot 9 = 09$, $2 \cdot 8 = 16$, $3 \cdot 7 = 21$, $4 \cdot 6 = 24$, $5 \cdot 5 = 25$.

• *В результате*: слева — произведение десятков, справа — произведение единиц.

Примеры:

1) $42 \cdot 48 = (4 \cdot 5) \cdot 100 + (2 \cdot 8) = 2000 + 16 = \underline{20}\mathbf{16}$

2) $51 \cdot 59 = (5 \cdot 6) \cdot 100 + (1 \cdot 9) = 3000 + 9 = \underline{30}\mathbf{09}$

3) $83 \cdot 87 = (8 \cdot 9) \cdot 100 + (3 \cdot 7) = 7200 + 21 = \underline{72}\mathbf{21}$

4) $115^2 = 115 \cdot 115 = (11 \cdot 12) \cdot 100 + (5 \cdot 5) =$
$= 13200 + 25 = \underline{132}\mathbf{25}$

1.1.3. Дроби, действия над ними. Округление чисел

Признаки делимости	
на 2	Число оканчивается на чётную цифру (0, 2, 4, 6, 8).
на 3	Сумма цифр делится на 3.
на 4	Две последние цифры числа — или нули, или число, делящееся на 4.
на 5	Последняя цифра числа — 0 или 5.
на 6	Одновременное выполнение признаков делимости на 2 и на 3.
на 7	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 2. Если получилось число, большее числа из оставшихся цифр, то следует вычесть из удвоенной последней цифры это число. Если число из оставшихся цифр больше, то надо из него вычесть удвоенную последнюю цифру.
на 8	Три последние цифры числа — нули или образуют число, делящееся на 8.
на 9	Сумма цифр числа делится на 9.
на 10	Последняя цифра числа — 0.
на 11	Разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11.
на 13	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 4 и прибавить к числу из оставшихся цифр.
на 25	Две последние цифры — нули или число, делящееся на 25.

Обыкновенные дроби и действия над ними

Основное свойство дроби:

$$\frac{m}{n}=\frac{m\cdot a}{n\cdot a};\ \frac{m}{n}=\frac{m:b}{n:b}$$

Сложение, вычитание дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{m}{n}+\frac{c}{n}=\frac{m+c}{n};\ \frac{m}{n}-\frac{c}{n}=\frac{m-c}{n}$$

Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю (нахождение наименьшего общего кратного знаменателей — НОК):

Пример: $\frac{3}{8}, \frac{7}{10}, \frac{11}{12}$.

$8 = 2\cdot 2\cdot 2$, $10 = 2\cdot 5$, $12 = 2\cdot 2\cdot 3$,
НОК $(8, 10, 12) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 3 = 120$,

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 15}{120}=\frac{45}{120};\ \frac{7}{10}=\frac{7\cdot 12}{120}=\frac{84}{120},$$

$$\frac{11}{12}=\frac{11\cdot 10}{120}=\frac{110}{120}.$$

Сложение смешанных чисел:

Пример: $2\frac{3}{8}+4\frac{7}{8}=6+\frac{3+7}{8}=6\frac{10}{8}=7\frac{2}{8}=7\frac{1}{4}$.

Вычитание смешанных чисел:

Пример: $5\frac{3}{11}-2\frac{6}{11}=4\frac{14}{11}-2\frac{6}{11}=2+\frac{14-6}{11}=2\frac{8}{11}$.

Умножение дробей: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Взаимно обратные числа a и b, если $a \cdot b = 1$. *Пример*: $1{,}2 = \frac{6}{5}$ и $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = 1$.
Деление дробей: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
Умножение смешанных чисел: *Пример*: $2\frac{1}{7} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{15}{7} \cdot \frac{17}{5} = \frac{15 \cdot 17}{7 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 17}{7} = \frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}$.
Десятичные дроби и действия над ними
Бесконечная десятичная дробь — дробь, у которой в дробной части бесконечное множество цифр.
Периодическая бесконечная дробь — дробь, ряд цифр которой постоянно повторяется. *Пример*: 2,838383... = 2,(83) — периодическая дробь; 57,072351748... — непериодическая дробь.
Сложение и вычитание десятичных дробей
1) Уравнять количество цифр после запятой во всех десятичных дробях, участвующих в вычислении, приписывая нули. 2) Сложить или вычесть получившиеся дроби по разрядам. *Пример*: 5,08 – 3,125 = 5,080 – 3,125 = 1,955.

Умножение десятичных дробей
1) Перемножить две десятичные дроби, как целые числа, не обращая внимания на запятые. 2) В полученном произведении отделить справа запятой столько цифр, сколько их было после запятых в обоих множителях вместе. 3) Деление десятичных дробей на целые числа производят так же, как деление целых чисел, а запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части.
Деление десятичных дробей на десятичную дробь
1) Перенести вправо запятую в делимом и делителе на столько цифр, сколько их имеется в дробной части делителя. 2) Разделить получившиеся числа, т.е. деление будет выполняться на целое число.

Перевод обыкновенной дроби в десятичную
Чтобы записать обыкновенную дробь в виде десятичной, нужно привести её к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т.д. • Если знаменатель обыкновенной дроби не имеет никаких простых делителей, кроме 2 и 5, то эту обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной.

Пример:

$$\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}=\frac{5\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^3}=\frac{625}{1000}=0{,}625;$$

$$\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3\cdot 5}=\frac{7\cdot 5^2}{2^3\cdot 5\cdot 5^2}=\frac{175}{1000}=0{,}175;$$

$$\frac{21}{60}=\frac{7}{20}=\frac{7}{2^2\cdot 5}=\frac{7\cdot 5}{2^2\cdot 5\cdot 5}=\frac{35}{100}=0{,}35.$$

• Если знаменатель обыкновенной дроби имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5, и эта дробь несократима, то её нельзя представить в виде десятичной.

Обыкновенная дробь	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
Десятичная дробь	0,125	0,2	0,25	0,5	0,75	0,4

Обыкновенная дробь	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$
Десятичная дробь	0,6	0,8	0,375	0,625	0,875

Округление чисел

• Заменяют нулями цифры, стоящие правее данного разряда, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают.

• Если цифра в следующем разряде после данного разряда равна 0, 1, 2, 3, 4, то в данном разряде оставляют ту же цифру, которая была.

• Если цифра в следующем разряде после данного разряда равна 5, 6, 7, 8, 9, то к цифре данного разряда прибавляют единицу.

Примеры:

1) Округлим число 3,76 до десятых.

Решение. В разряде сотых цифра 6, поэтому десятые увеличиваем на 1, остальные разряды обнуляем, а так как нули оказываются после запятой, то отбрасываем их, $3{,}76 \approx 3{,}8$.

2) Округлим число 6324,5 до тысяч.

Решение. В разряде сотен цифра 3, значит, тысячи оставляем без изменения, остальные разряды обнуляем, а стоящие после запятой отбрасываем, $6324{,}5 \approx 6000$.

3) Округлим 7835 до сотен; до тысяч.

Решение.
$7835 \approx 7800$ — округление до сотен;
$7835 \approx 8000$ — округление до тысяч.

4) Округлим 5,0229 до сотых; до тысячных.

Решение.
$5{,}0229 \approx 5{,}02$ — округление до сотых;
$5{,}0229 \approx 5{,}023$ — округление до тысячных.

1.1.4. Отношения, пропорции и проценты

Отношения
Отношение двух чисел — частное двух чисел. • Отношение двух чисел показывает, во сколько первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго. *Пример*. Отношение числа 12 к числу 4 есть частное $12:4=3$, значит, 12 больше 4 в 3 раза. Отношение числа $5\frac{1}{4}$ к числу $6\frac{1}{8}$ есть частное $5\frac{1}{4}:6\frac{1}{8}=\frac{6}{7}$, следовательно, число $5\frac{1}{4}$ составляет $\frac{6}{7}$ от числа $6\frac{1}{8}$. **Отношение величин** (отношение длин, отношение масс, отношение площадей и т. д.) — отношение значений этих величин, измеренных одной и той же единицей измерения. *Пример*. Известно, что масса ребёнка — 20 кг, а масса взрослого человека 70 кг, тогда отношение масс равно $20\text{ кг} : 70\text{ кг} = \frac{20\text{ кг}}{70\text{ кг}} = \frac{2}{7}$, т. е. масса ребёнка составляет $\frac{2}{7}$ от массы взрослого человека. • Отношения часто выражают в процентах. *Пример*. В классе 5 отличников из 25 учеников. $\frac{5}{25}=\frac{1}{5}=0{,}2=20\ \%$. Значит, в этом классе 20 % отличников.

Нахождение части от целого и целого по его части	
Нахождение части от целого	Чтобы найти часть от числа, выраженную дробью, нужно это число умножить на данную дробь. *Пример*. В школе из 200 учеников $\frac{3}{4}$ занимаются спортом. Сколько учеников школы занимаются спортом? *Решение*. $200 \cdot \frac{3}{4} = \frac{200 \cdot 3}{4} = 150$ учеников.
Нахождение целого по части	Чтобы найти число по его части, выраженной дробью, нужно разделить на эту дробь число, ей соответствующее. *Пример*. 150 учеников занимаются спортом, это $\frac{3}{4}$ всех учащихся. Сколько всего учеников в данной школе? *Решение*. $150 : \frac{3}{4} = \frac{150 \cdot 4}{3} = 200$ учеников.
Нахождение части в долях целого	Чтобы выразить часть в долях целого, надо разделить часть на целое. *Примеры*: 1) 150 школьников из 200 учеников данной школы занимаются спортом. Какая часть школьников занимается спортом? *Решение*. $\frac{150}{200} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ всех школьников. 2) Какую часть составляет 20 от 100? *Решение*. $\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$.

Пропорция

Пропорция — равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ или } a : b = c : d,$$

где a, d — крайние члены пропорции; b, c — средние члены пропорции.

Основное свойство пропорции: если $ad = bc$, то пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ верная.

Прямо пропорциональная зависимость. Если при увеличении (или уменьшении) величины m величина n во столько же раз увеличивается (или уменьшается), то m и n прямо пропорциональны.

Примеры прямо пропорциональных величин

- Количество товара и его стоимость при постоянной цене.
- Скорость и длина пути при постоянном времени.
- Длина пути, проходимого равномерно движущимся телом, и время его движения.
- Длина прямоугольника и его площадь при постоянной ширине.
- Объём параллелепипеда и площадь его основания при постоянной высоте.
- Величина дроби и её числитель при постоянном знаменателе.
- Объём выполненной работы и затраченное на неё время при постоянной производительности труда.
- Производительность труда и объём выполненной работы при постоянном времени.

Обратно пропорциональная зависимость. Если при увеличении (при уменьшении) величины m величина n во столько же раз соответственно уменьшается (увеличивается), то эти величины обратно пропорциональны.

Примеры обратно пропорциональных величин

- Количество товара и его цена при одинаковой стоимости покупки.
- Скорость и время движения равномерно движущегося объекта при одинаковой длине пути.
- Производительность труда и время работы при одинаковом объёме работы.
- Число рабочих и время выполнения ими заданной работы при одинаковой производительности труда всех рабочих.
- Величина дроби и её знаменатель при постоянном числителе.

Процент

Процент (%) — сотая часть числа.

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\ \%$$

Нахождение процента от величины	**Нахождение величины по её проценту**
Например, требуется найти 13% от 80. *Решение.* $0{,}13 \cdot 80 = 10{,}4$.	*Например*, имеем 10,4 — это 13%. Необходимо найти 100 %. *Решение.* $10{,}4 : 0{,}13 = 80$.

• Если в условии задачи сказано, что число увеличилось (уменьшилось) на r %, то надо прибавить (вычесть) r % к (из) 100 %, то есть получится 100 % + r % (100 % – r %), затем записать результат в виде дроби и умножить на первоначальное число.

Примеры:

1) Цена товара 200 руб. Через месяц эта цена выросла на 30 %. Какова новая цена товара?

Решение. 100 % + 30 % = 130 % = 1,3.
$200 \cdot 1{,}3 = 260$ (руб.)

Ответ: 260 рублей.

2) Первоначальная цена товара 300 руб. Скидка составила 40 %. Найти новую цену.

Решение. 100 % – 40 % = 60 % = 0,6.
$300 \cdot 0{,}6 = 180$ (руб.)

Ответ: 180 рублей.

Сложные проценты

Сложный процент — это процент, начисленный на процент.

Формула сложных процентов:

$$B = B_0(1 + 0{,}01r)^n,$$

где B_0 — начальная сумма, B — конечная сумма, r % — процентная ставка, n — число периодов.

• Для удобства вычислений сложных процентов выражение $1 + 0{,}01r$ часто заменяют на переменную k, т.е. $k = 1 + 0{,}01r$.

Пример. Известно, что сумма вклада равна 5000 руб.; процентная ставка — 10 %; вклад оформлен на 3 года. Какая сумма будет на счету в конце срока?

Решение.
Из условия следует, что $B_0 = 5000$, $r = 10\ \% = 0{,}1$.
Отсюда, $k = 1{,}1$; $n = 3$.
$B = B_0k^n = 5000 \cdot 1{,}1^3 = 5000 \cdot 1{,}331 = 6655$ (руб.).

Ответ: 6655 рублей сумма счёта в конце срока вклада.

Секреты ЕГЭ

Дано: $p = r\ \% = \frac{r}{100}$. Требуется найти r % от числа a.

$$\textit{Решение}: \frac{ar}{100} = ap;$$

$$k = 100\ \% + r\ \% = 1 + \frac{r}{100} = 1 + p.$$

Например, $p = 2\ \% = 0{,}02$.

$k = 100\ \% + 2\ \% = 1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$.

1.1.5. Модуль и его свойства

Определение модуля числа
$$\lvert x \rvert = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$
Геометрический смысл модуля
Модуль числа — это расстояние на координатной прямой от начала отсчёта до точки, обозначающей соответствующее число. Данное расстояние измеряется в единичных отрезках.

Свойства модуля
$\lvert a \rvert \geqslant 0;$
$\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert;$
$\lvert a^2 \rvert = \lvert a \rvert^2 = a^2;$
$\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert;$
$\lvert a : b \rvert = \lvert a \rvert : \lvert b \rvert,\ b \neq 0;$
$\lvert a + b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert;$
$\lvert a - b \rvert \geqslant \lvert a \rvert - \lvert b \rvert;$
$a^2 + b^2 \geqslant 2\lvert ab \rvert;$
$\lvert x \rvert = c,\ c \geqslant 0;\ x_1 = c,\ x_2 = -c;$
$\lvert x \rvert < c,\ c > 0;\ -c < x < c;$
$\lvert x \rvert > c,\ c > 0;\ x < -c,\ x > c.$

1.1.6. Положительные и отрицательные числа, действия над ними

$x > 0$ — положительное число $x < 0$ — отрицательное число $-x$ и x — противоположные числа
Сложение
1) Знак суммы всегда от большего модуля. 2) Одинаковые модули складываем, разные модули — вычитаем.

Вычитание
Заменяем сложением с противоположным числом. *Примеры*: -7 и 7; $-(-7)$ и -7 — противоположные числа; $-8 + 3 = -(8 - 3) = -5$; $-8 - 3 = -(8 + 3) = -11$; $-3 + 8 = 8 - 3 = 5$; $3 + 8 = 11$; $-8 - (-3) = -8 + 3 = -(8 - 3) = -5$; $3 - (-8) = 3 + 8 = 11$.
Умножение и деление
Одинаковые знаки в результате дают «плюс», разные знаки — «минус». Модули перемножаем или делим соответственно. *Примеры*: $-10 : 2 = -5$; $-18 \cdot (-4) = 72$.

1.1.7. Степени, корни и их свойства

Степень
Степень с натуральным (N) показателем
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$; $a^1 = a$ *Примеры*: $a^3 = a \cdot a \cdot a$; $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$.
Степень с целым (Z) показателем
$a^0 = 1,\ a \neq 0,\ b \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Примеры: $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$; $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} = 6{,}25.$
Степень с рациональным (Q) показателем
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $a > 0$. *Примеры*: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$; $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4.$
Свойства степеней
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$

Корень
Арифметический квадратный корень $\sqrt{a}$ (корень 2-ой степени)
$\sqrt{a} = b$, $a = b^2$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Свойства арифметического квадратного корня
$(\sqrt{a})^2 = a,\ a \geqslant 0$ $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert,\ a \in \mathrm{R}$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a \geqslant 0,\ b > 0$
Корень *n*-ой степени $\sqrt[n]{a}$
$\sqrt[n]{a} = b,\ a = b^n$ • если n — чётное число, то $a \geqslant 0$; • если n — нечётное число, то $a \in \mathbf{R}$.
Свойства корня *n*-ой степени
$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}},\ b \neq 0$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

1.1.8. Логарифмы и их свойства

Понятие логарифма

$$log_a b = c,$$

где a — основание логарифма, b — выражение под знаком логарифма, c — логарифм; $b = a^c$, $a \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$.

Основное логарифмическое тождество

$$a^{log_a b} = b$$

Примеры:

$5^{\log_5 8} = 8;$

$36^{\log_6 7} = (6^2)^{\log_6 7} = (6^{\log_6 7})^2 = 7^2 = 49.$

Свойства логарифмов $a \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b^k = k\log_a b$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$$

$$\log_{a^n} b^k = \frac{k}{n}\log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\ (c \neq 1)$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Примеры:

- $\log_4 3{,}2 + \log_4 5 = \log_4(3{,}2 \cdot 5) = \log_4 16 = 2;$
- $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2} = 1{,}5;$
- $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1{,}5;$
- $\log_5 17 \cdot \log_{17} 5 = 1;$
- $27^{\log_9 25} = 25^{\log_9 27} = 25^{\frac{3}{2}\log_3 3} = 25^{\frac{3}{2}} =$

  $= (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125.$

$\log_{10} x = \lg x$ — **десятичный логарифм** числа x.

Примеры: $\lg 100 = 2$; $\lg 0{,}001 = -3$; $\lg 1 = 0$.

$\log_e x = \ln x$ — **натуральный логарифм** числа x, где e — иррациональное число и $e \approx 2{,}718281828459045\ldots$

Примеры: $\ln e^2 = 2$; $\ln 1 = 0$.

1.2. Преобразование выражений с переменными

1.2.1. Раскрытие скобок

Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «плюс»: • $-k + (-b + c - d) = -k - b + c - d$. • $2x^2 + (6 + 5x - y) = 2x^2 + 6 + 5x - y$.
Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «минус»: • $-(a - b + c) = -a + b - c$. • $2m - (-\sqrt[3]{x^2} + 5) = 2m + \sqrt[3]{x^2} - 5$.
Произведение одночлена на многочлен: • $x^2(2x^2 - y + z) = 2x^4 - yx^2 + zx^2$. • $(3a^2b + 5ab^2 - c) \cdot ab = 3a^3b^2 + 5a^2b^3 - cab$.
Произведение многочленов: $(3x + 5y)(6x - 7y + 8b) = 3x \cdot 6x - 3x \cdot 7y + 3x \cdot 8b +$ $+ 5y \cdot 6x - 5y \cdot 7y + 5y \cdot 8b =$ $= 18x^2 - 21xy + 24xb + 30yx - 35y^2 + 40yb =$ $= 18x^2 + 9xy + 24xb - 35y^2 + 40yb$.

1.2.2. Приведение подобных слагаемых

Приведение подобных слагаемых:
• $3ab - 4{,}2ab + 10ab = 8{,}8ab$;
• $7a + 2a - 5a + 11a = 15a$;
• $\frac{1}{2}m + \frac{5}{7}n + 1{,}5m - \frac{2}{7}n = 2m + \frac{3}{7}n$.

1.2.3. Формулы сокращённого умножения

Формулы сокращённого умножения (раскрытие скобок)
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$;
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$;
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

1.2.4. Различные способы разложения на множители

Вынесение общего множителя за скобки
$mk + mp = m(k+p)$

Формулы сокращённого умножения (разложение на множители)
$m^2 - k^2 = (m - k)(m + k)$
$m^2 + 2mk + k^2 = (m + k)^2$
$m^2 - 2mk + k^2 = (m - k)^2$
$m^3 + k^3 = (m + k)(m^2 - mk + k^2)$
$m^3 - k^3 = (m - k)(m^2 + mk + k^2)$
$m^3 + 3m^2k + 3mk^2 + k^3 = (m + k)^3$
$m^3 - 3m^2k + 3mk^2 - k^3 = (m - k)^3$
$m^4 - k^4 = (m^2 - k^2)(m^2 + k^2) = (m - k)(m + k)(m^2 + k^2)$

Метод группировки
$mk + mp + tk + tp =$ $= m(k + p) + t(k + p) = (k + p)(m + t)$ *Пример.* $3x - 21 + mx - 7m = 3(x - 7) + m(x - 7) = (x - 7)(3 + m)$.

1.3. Основы тригонометрии

1.3.1. Радианная и градусная меры произвольного угла

Радиан — длина дуги окружности, равная радиусу (в единичной окружности = 1).
Все окружности подобны, значит, отношение соответствующих длин отрезков прямых и кривых в окружностях постоянно.

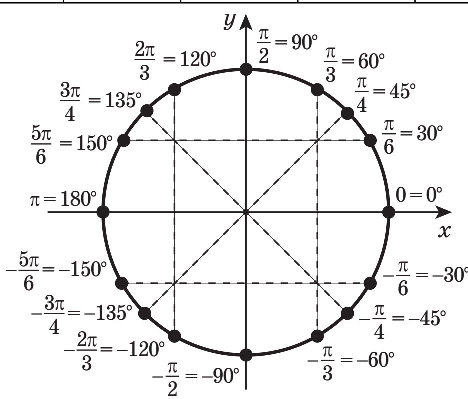
Если C — длина окружности, D — диаметр окружности, то для любых окружностей, верно, $\frac{C}{D} \approx 3{,}14$ или $\frac{C}{D} = \pi$, где π — бесконечная непериодическая десятичная дробь. Отсюда длина окружности $C = \pi D$, $D = 2R$, где R — радиус, $C = 2\pi R$. Если $R = 1$, то $C = 2\pi$.

При записи единиц измерения радиан опускают, т.е. $360° = 2\pi$ радиан, а пишем $360° = 2\pi$.

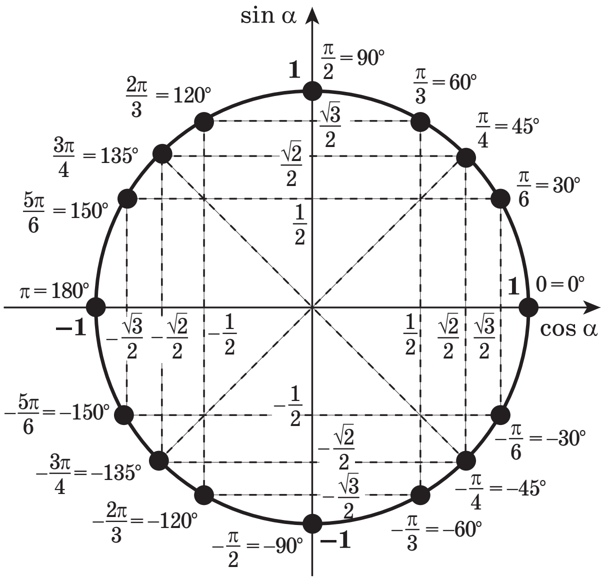
Окружность соответствует углу $360°$. Соотношение углов и соответствующих дуг окружности:

Градусы	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**360°**
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

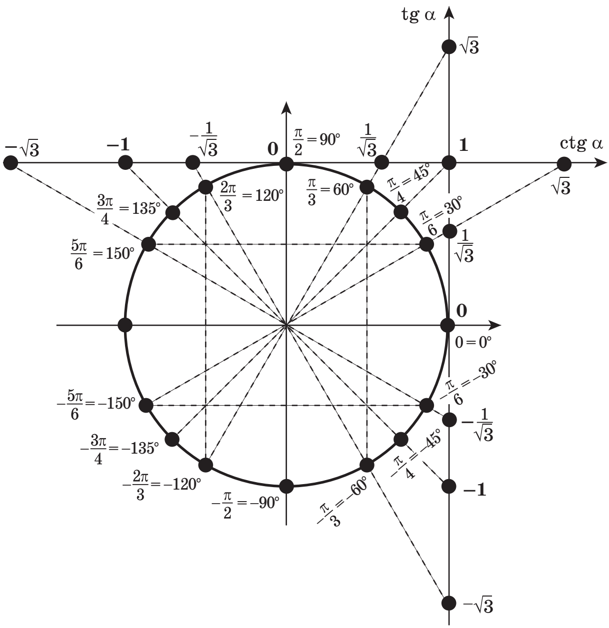
Градусы	**120°**	**135°**	**150°**	**270°**
Радианы	$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$



1.3.2. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла



$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\sin 0$	$\sin\frac{\pi}{6}$	$\sin\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{\pi}{2}$
$\cos\pi$	$\cos\frac{5\pi}{6}$	$\cos\frac{3\pi}{4}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{2}$	$\cos\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{4}$	$\cos\frac{\pi}{6}$	$\cos 0$
-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$-\frac{\sqrt{4}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$



$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\mathrm{tg}\,0$	$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}$	$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$	$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{ctg}\,\frac{5\pi}{6}$	$\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{4}$	$\mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{3}$	$\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2}$	$\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3}$	$\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}$	$\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6}$
$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

1.3.3. Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

1.3.4. Формулы приведения

Назовём тригонометрические функции синус и косинус, тангенс и котангенс **кофункциями**, так как их названия отличаются только приставкой «ко».

Формулой приведения будем называть равенство, в одной части которого записана какая-нибудь тригонометрическая функция от суммы или разности, содержащей точки $\frac{\pi k}{2}$, т.е. $\sin\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi k}{2} \pm \alpha\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Далее следуем мнемоническому (упрощённому) правилу:

1) Знак. Перед приведённой функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция, если условно считать $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Исходная функция меняется на кофункцию, если в выражении $\frac{\pi k}{2}$ «k» — число нечётное, т.е. $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, и не меняется, если k — число чётное, т.е. πk, $k \in \mathbf{Z}$.

Примеры:

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$, так как $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ во II четверти, где sin больше нуля, а наличие $\frac{\pi}{2}$ в формуле требует поменять sin на cos.

- $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, так как $(\pi-\alpha)$ во II четверти, где cos меньше нуля, а наличие π в формуле позволяет не менять cos.

- $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$, так как $\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$ в III четверти, где tg больше нуля, а наличие $\frac{7\pi}{2}$ в формуле требует поменять tg на ctg.

- $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$, так как $\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$ в I четверти, где tg больше нуля, а наличие $\frac{5\pi}{2}$ в формуле требует поменять ctg на tg.
- $\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha$.
- $\cos(180^\circ+\alpha) = -\cos\alpha$.
- $\operatorname{tg}(270^\circ+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.
- $\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$.

1.3.5. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Примеры:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha=$
$=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha).$

1.3.6. Синус и косинус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

1.4. Уравнения и системы уравнений

1.4.1. Уравнение с одной переменной, корень уравнения

Уравнение с одной переменной (уравнение с одной неизвестной) — равенство, содержащее переменную.

Корень уравнения — значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — найти все его корни или доказать, что корней нет.

Правила решения уравнений
• Если любое слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом знак слагаемого, то корни уравнения не изменяются. • Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, то корни уравнения не изменяются.

1.4.2. Линейные уравнения

Линейное уравнение — целое уравнение вида $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.
Решение линейных уравнений
• Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = -\dfrac{b}{a}$; • Если $a \neq 0$, $b = 0$, то $x = 0$; • Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет; • Если $a = 0$, $b = 0$, то x — любое число.

1.4.3. Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — уравнение вида: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$		
Неполные квадратные уравнения		
• при $c = 0$, $b \neq 0$ $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ $x(ax + b) = 0$ $x = 0$ или $x = -\dfrac{b}{a}$	• при $c = 0$, $b = 0$ $\boldsymbol{ax^2 = 0}$ $x^2 = 0$ $x = 0$	• при $c \neq 0$, $b = 0$ $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ $x^2 = -\dfrac{c}{a}$; $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ если $-\dfrac{c}{a} < 0$, то корней нет

Вычисление дискриминанта D и корней квадратного уравнения
• $D = b^2 - 4ac$, • $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ • Если b — чётное, то $D_1 = k^2 - ac$, $k = \dfrac{b}{2}$, $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$

Теорема Виета	
$ax^2 + bx + c = 0$ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$	$x^2 + bx + c = 0$ $(a = 1)$ — приведённое квадратное уравнение $x_1 \cdot x_2 = c$ $x_1 + x_2 = -b$
• Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$. • Если $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.	
Решение неприведённого квадратного уравнения по теореме Виета	
$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + bm + ac = 0$ $D = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $m_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$, $x_{1,2} = \dfrac{m_{1,2}}{a}$, находим $m_{1,2}$ по теореме Виета.	

Пример. Решите уравнение: $3x^2 - 14x + 16 = 0$.

Решение.

1) $D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 =$
$= 196 - 192 = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ 2 корня.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{14 + 2}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 - \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{14 - 2}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

2) $b = -14$ — чётное, $k = \frac{b}{2}$.

$D = k^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1$.

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 + 1}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$x_2 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 - 1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

3) Применяя теорему Виета, перепишем данное уравнение в виде $m^2 + bm + ac = 0$.
$m^2 - 14m + 3 \cdot 16 = 0$, $m^2 - 14m + 48 = 0$.

$x_1 = \frac{m_1}{3}$, $x_2 = \frac{m_2}{3}$, m_1 и m_2 находим подбором:

$m_1 \cdot m_2 = c$, $m_1 + m_2 = -b \to 8 \cdot 6 = 48$, $8 + 6 = 14$.
$x_1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{6}{3} = 2$. Теперь проверяем корни:

$$\frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3} = \frac{c}{a}, \ \frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{14}{3} = -\frac{b}{a}.$$

Ответ: $x_1 = 2\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$.

1.4.4. Дробно-рациональные уравнения

Рациональные уравнения — уравнения, левая и правая части которых являются рациональными выражениями.

Алгоритм решения рациональных уравнений

Разделить левую и правую части уравнения на общий делитель, если таковой имеется.

↓

Разложить на множители многочлены в знаменателях, если они раскладываются.

↓

Домножить на наименьший общий знаменатель левую и правую части уравнения.

↓

Решить полученное целое уравнение.

↓

Проверить корни уравнения, не превращают ли они знаменатель первоначального уравнения в нуль. Если да, то исключить такие корни.

↓

Записать ответ.

Примеры:

1) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2^{\backslash x-1}}{x-1} - 3^{\backslash x^2-2x+1} = 0 \mid (x-1)^2 \neq 0,\ x \neq 1.$

$1 + \underline{2x} - 2 - 3x^2 + \underline{6x} - 3 = 0,$
$3x^2 - 8x + 4 = 0.$
$x_1 = \frac{2}{3};\ x_2 = 2.$

Ответ: $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = 2.$

2) $\dfrac{60}{x+10}+3=\dfrac{60}{x}\ \Big|:3$

$\dfrac{20^{\backslash x}}{x+10}+1^{\backslash x^2+10x}=\dfrac{20^{\backslash x+10}}{x}\ \Big|\ x(x+10)\neq 0,\ x\neq 0,\ x\neq -10.$

$20x+x^2+10x=20x+200,$

$x^2+10x-200=0,$

$x_1=-20,\ x_2=10.$

Ответ: –20; 10.

Секреты ЕГЭ

Часто, решая уравнения с большими числами, мы получаем дискриминант квадратного уравнения равный пятизначному числу. В некоторых случаях можно упростить решение, воспользовавшись заменой переменной.

Примеры:

1) $\dfrac{50}{25-y}=\dfrac{50-3y}{y}.$

Решение. Сократим дроби в левой и правой части уравнения на 25, $m=\dfrac{y}{25}$, т.е. $y=25m$.

$\dfrac{2}{1-m}=\dfrac{2-3m}{m}\ \Big|\cdot m(1-m)\neq 0,\ m\neq 0,\ m\neq 1$

$2m=2-5m+3m^2;$

$3m^2-7m+2=0;$

$m_1=\dfrac{1}{3},\ m_2=2;$

$y_1=25m_1=\dfrac{25}{3}=8\dfrac{1}{3};\ y_2=25m_2=25\cdot 2=50.$

Ответ: $8\dfrac{1}{3}$; 50.

2) $\dfrac{180}{x+12} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{180}{x}$.

Решение.

Сократим две дроби с числителем 180 на 12,

$m = \dfrac{x}{12}$, т.е. $x = 12m$,

$$\frac{15^{\backslash 6m}}{m+1} + \frac{1^{\backslash m^2+m}}{6} = \frac{15^{\backslash 6m+6}}{m} \quad \Bigg| \begin{array}{l} \cdot\, 6m(m+1) \neq 0,\ m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{array}$$

$15 \cdot 6m + m^2 + m = 15 \cdot 6m + 90;$

$m^2 + m - 90 = 0;$

$m_1 = 9,\ m_2 = -10;$

$x_1 = 9 \cdot 12 = 108,\ x_2 = -10 \cdot 12 = -120.$

Ответ: 108.

1.4.5. Иррациональные уравнения

<table>
<tr><td colspan="2">Иррациональные уравнения — уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основные типы иррациональных уравнений</td></tr>
<tr><td>$\sqrt[n]{f(x)} = a$</td><td>• Если n — чётно, то при $a \geqslant 0$ — $f(x) = a^n$; при $a < 0$ — решений нет;
• Если n — нечётно, то $f(x) = a^n$.</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{f(x)} = g(x)$</td><td>$\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$</td><td>• Если n — чётно, то
$\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$
• Если n — нечётно, то $f(x) = g(x)$.</td></tr>
</table>

Примеры:

1) $\sqrt{20-x}=x$.

Решение.

$\begin{cases}20-x=x^2,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+x-20=0,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ или $\begin{cases}x=-5,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$

Ответ: 4.

2) $\sqrt{10+x}=\sqrt{3-x}$.

Решение.

$\begin{cases}10+x=3-x,\\ 3-x\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x=-7,\\ x\leqslant 3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3{,}5,\\ x\leqslant 3.\end{cases}$

Ответ: $-3{,}5$.

1.4.6. Показательные уравнения

Показательные уравнения — уравнения, в которых переменная входит только в показатели степени при постоянных основаниях.

Простейшее показательное уравнение
$\boldsymbol{a^x=b}$, $a>0$, $a\neq 1$.

- Если $b>0$, то $x=\log_a b$.
- Если $b\leqslant 0$, то решений нет.

Примеры:
1) $2^x=7$, $x=\log_2 7$;
2) $3^x=-4$, $-4<0$, решений нет.

Уравнение $\boldsymbol{a^{p(x)}=a^{g(x)}}$, $a>0$, $a\neq 1$

Решение: $p(x)=g(x)$.

Пример.

$4^{x-15}=\dfrac{1}{2}$; $2^{2(x-15)}=\dfrac{1}{2}$; $2^{2x-30}=2^{-1}$; $2x-30=-1$;
$2x=29$, $x=14{,}5$.

Уравнение $a^{p(x)} = b^{p(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$

Решение: $\dfrac{a^{p(x)}}{b^{p(x)}} = 1$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{p(x)} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{0}$; $p(x) = 0$.

Пример. $4^{4-x} = 0{,}4 \cdot 10^{4-x}$.

Решение: $\left(\dfrac{4}{10}\right)^{4-x} = 0{,}4$; $0{,}4^{4-x} = 0{,}4$; $4 - x = 1$; $x = 3$.

Ответ: 3.

Методы решения показательных уравнений

- **Замена переменной**

Пример. $4^{x+1} - 4 \cdot 2^x - 3 = 0$.

Решение.

$4 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x - 3 = 0$; $4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 3 = 0$.

Замена $2^x = t$. $4t^2 - 4t - 3 = 0$; $t_1 = -\dfrac{1}{2}$, $t_2 = \dfrac{3}{2}$;

$2^x = -\dfrac{1}{2}$ — нет решений; $2^x = \dfrac{3}{2}$; $x = \log_2 \dfrac{3}{2}$;

$x = \log_2 3 - 1$.

Ответ: $\log_2 3 - 1$.

- **Однородные уравнения**

Пример. $9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x = 0$.

Решение.

$(3^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 3^x - 3 \cdot (2^x)^2 = 0 \,\big|\, : (2^x)^2$;

$\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right)^2 - 2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 3 = 0$. Замена $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = t$; $t^2 - 2t - 3 = 0$;

$t_1 = -1$, $t_2 = 3$; $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = -1$ — решений нет; $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 3$,

$x = \log_{1,5} 3$.

Ответ: $\log_{1,5} 3$.

1.4.7. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения — уравнения, в которых переменная находится под знаком логарифма или в основании логарифма.

Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b,$$

$$a > 0,\ a \neq 1,\ x = a^b.$$

Пример. $\log_3 (5 - x) = 5$.
Решение. $5 - x = 3^5$; $x = 5 - 243$; $x = -238$.
Ответ: -238.

Уравнение

$$\log_a p(x) = \log_a g(x),$$

$$\begin{cases} p(x) = g(x), \\ p(x) > 0. \end{cases}$$ (примечание, или $g(x) > 0$, что удобнее)

Пример.
$\log_3 (x^2 - 2) = \log_3 (x + 4)$.
Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 2 = x + 4, \\ x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x > -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2, \\ x > -4; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 3, \\ x > -4. \end{cases}$$

Ответ: -2; 3.

Замена переменной

Пример.
$2\log_9^2 x - 3\log_9 x + 1 = 0$.

Решение.

Замена: $\log_9 x = t$, $2t^2 - 3t + 1 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$;

$\log_9 x = 1$ или $\log_9 x = \dfrac{1}{2}$; $x = 9$ или $x = 9^{\frac{1}{2}}$, $x = 3$.

Ответ: 3; 9.

1.4.8. Тригонометрические уравнения

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Общее решение	Частные случаи $a = 0$	$a = 1$	$a = -1$
$\sin x = a$, $\lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$ или $\left[\begin{array}{l} x_1 = \arcsin a + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right.$	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
$\cos x = a$, $\lvert a \rvert \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k$ или $\left[\begin{array}{l} x_1 = \arccos a + 2\pi k \\ x_2 = -\arccos a + 2\pi k \end{array}\right.$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi k$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$			
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$			

где $k \in \mathbf{Z}$ (**Z** — множество целых чисел: ..., –4, –3, – 2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ...)

Методы решений тригонометрических уравнений

Метод замены переменной

Пример. $3\cos 2x - 5 \sin x + 1 = 0$.

Решение. $3(1 - 2\sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$. Замена $\sin x = t$, $3(1 - 2t^2) - 5t + 1 = 0$; $3 - 6t^2 - 5t + 1 = 0$; $6t^2 + 5t - 4 = 0$; $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -\frac{4}{3}$; $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -\frac{4}{3} < -1$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Однородные уравнения

Пример. $3\cos^2 x - \sin^2 x + \sin 2x = 2$.

Решение.

$3\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x$;

$\cos^2 x - 3\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 0 \quad |: \cos^2 x$;

$1 - 3\mathrm{tg}^2\, x + 2\mathrm{tg}\, x = 0$; $3\mathrm{tg}^2\, x - 2\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$; $\mathrm{tg}\, x = 1$ или $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{3}$;

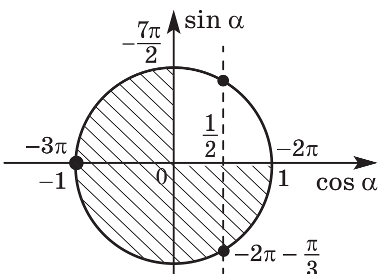
$x = \mathrm{arctg}\, 1 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ или $x = -\mathrm{arctg}\, \frac{1}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$;

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, $-\mathrm{arctg}\, \frac{1}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Отбор корней тригонометрического уравнения на промежутке

Пример. $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -1$. $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.



$-2\pi^{\backslash\times 3} - \frac{\pi}{3} = \frac{-6\pi - \pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: -3π; $-\frac{7\pi}{3}$.

1.4.9. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных

Система линейных уравнений с двумя переменными — система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2; \end{cases}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — некоторые числа, x и y — переменные.

Например, $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 15x - 6y = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 8. \end{cases}$

Решение системы уравнений с двумя переменными — пара значений переменных, которая обращает каждое уравнение системы в верное равенство.

Способы решения систем линейных уравнений

I. Графический способ	II. Способ подстановки	III. Способ сложения

I. Графический способ решения системы уравнений
Графический способ состоит в том, что в одной координатной плоскости строят два графика, каждый из которых соответствует одному из уравнений. Координаты точек пересечения этих графиков удовлетворяют и первому, и второму уравнению, т. е. являются решением системы.

Решения системы линейных уравнений с двумя переменными (в каждом уравнении хотя бы один из коэффициентов не равен нулю) графическим способом

- Если графики уравнений (прямые) пересекаются, то система имеет единственное решение, равное координатам точки пересечения;
- если графики уравнений (прямые) параллельны, то система не имеет решений;
- если графики уравнений (прямые) совпадают, то система имеет бесконечно много решений.

II. Способ подстановки для решения систем уравнений с двумя переменными

1. Выражают одну переменную через другую в одном из уравнений системы.
2. Полученное выражение подставляют в другое уравнение системы вместо выраженной переменной.
3. Решают уравнение, получившееся в результате подстановки.
4. Полученное значение переменной подставляют в первое уравнение и находят значение оставшейся переменной.

Примеры:

1) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 10, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Решение. Выразим переменную x через y из второго уравнения $x = y + 3$. Подставим в первое уравнение вместо переменной x выражение $y + 3$.

Решим полученное уравнение с переменной y:
$(y + 3)y = 10$; $y^2 + 3y - 10 = 0$;

$y_1 = 2$;

$y_2 = -5$.

Подставим в уравнение $x = y + 3$ вместо y его значения.

$x_1 = 2 + 3$; $x_1 = 5$;

$x_2 = -5 + 3$; $x_2 = -2$.

Ответ: (5; 2) и (–2; –5).

2) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ 3x - 6y = 10. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ 3x - 6y = 10; \end{cases}$$

$2x + 3y = 9$; $3y = 9 - 2x$;

$y = \dfrac{9 - 2x}{3}$;

$3x - 6 \cdot \dfrac{9 - 2x}{3} = 10$;

$3x - 2 \cdot (9 - 2x) = 10$;

$3x - 18 + 4x = 10$;

$7x = 28$;

$x = \dfrac{28}{7}$; $x = 4$; $y = \dfrac{9 - 2 \cdot 4}{3}$; $y = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\left(4; \dfrac{1}{3}\right)$.

III. Способ сложения для решения систем уравнений с двумя переменными

1. Уравнения системы почленно умножают на некоторые множители, которые подбирают таким образом, чтобы коэффициенты при одной из переменных в обоих уравнениях стали противоположными числами.

2. Левые и правые части уравнений почленно складывают.

3. Находят значение одной из переменных, решая получившееся уравнение с одной переменной.

4. Находят значение второй переменной, подставляя в оставшееся уравнение значение первой переменной.

Примеры:

1) $\begin{cases} x^2 + y = 6, \\ x - y = 6. \end{cases}$

Решение.

Коэффициенты при переменной y в первом и втором уравнениях — противоположные числа 1 и –1. Поэтому складываем почленно уравнения и получаем уравнение с одной переменной:

$x^2 + x = 12$; $x^2 + x - 12 = 0$;

$x_1 = -4$; $x_2 = 3$.

Найдём вторую переменную:

$y = x - 6$;

$y_1 = -4 - 6 = -10$;

$y_2 = 3 - 6 = -3$.

Ответ: (–4; –10) и (3; –3).

2) $\begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ 6x + y = 4. \end{cases}$

Решение.

Домножим второе уравнение на -2, чтобы коэффициенты при переменной x были противоположными числами 12 и -12.

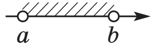
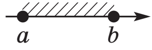
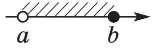
$\begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ -2 \cdot 6x - 2 \cdot y = -2 \cdot 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ -12x - 2y = -8. \end{cases}$

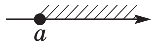
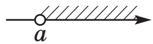
Складываем почленно оба уравнения. Получаем: $-7y = -7$; $y = 1$; $6x + 1 = 4$; $6x = 4 - 1$; $6x = 3$; $x = \frac{3}{6}$; $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

1.5. Неравенства и системы неравенств

1.5.1. Линейные неравенства

Числовые промежутки			
Вид промежутка	**Геометрическое изображение**	**Обозначение**	**Запись с помощью неравенств**
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leqslant b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leqslant x < b$

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geqslant a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leqslant b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

Линейные неравенства с одной переменной — неравенства вида $ax > b$ (или $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$), а также равносильные им неравенства, где a и b — некоторые числа.

Решение неравенства $ax > b$

- Если $a > 0$, то $x > \dfrac{b}{a}$;
- если $a < 0$, то $x < \dfrac{b}{a}$;
- если $a = 0$ и $b > 0$, то нет решений;
- если $a = 0$ и $b < 0$, то x — любое число.

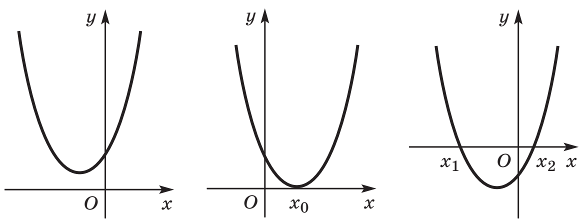
1.5.2. Квадратные неравенства

Неравенство второй степени с одной переменной — неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (или $ax^2 + bx + c \geqslant 0$), $ax^2 + bx + c < 0$ (или $ax^2 + bx + c \leqslant 0$), где $a \neq 0$.

Схема решения квадратных неравенств
1. Находят дискриминант квадратного трёхчлена $D = b^2 - 4ac$ и выясняют, имеет ли этот трёхчлен корни. 2. Если корней нет, то схематически изображают параболу (при $a > 0$ она лежит в верхней полуплоскости, а её ветви направлены вверх; при $a < 0$ — в нижней полуплоскости, а её ветви направлены вниз). Если же корни есть, то их отмечают на оси абсцисс и через отмеченные точки схематически проводят параболу, у которой ветви направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$. 3. Находят промежутки оси абсцисс, на которых точки параболы расположены выше этой оси (при решении неравенства $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже этой оси (при решении неравенства $ax^2 + bx + c < 0$).

Решение квадратного неравенства при $a > 0$			
$ax^2 + bx + c > 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; x_0) \cup$ $\cup (x_0; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup$ $\cup [x_2; +\infty)$	Рис. *в*)

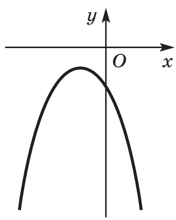
Решение квадратного неравенства при $a > 0$			
$ax^2 + bx + c < 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	Нет решений	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x = x_0$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in [x_1; x_2]$	Рис. *в*)



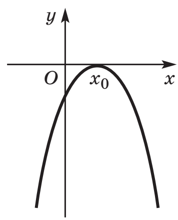
а) *б*) *в*)

Решение квадратного неравенства при $a < 0$			
$ax^2 + bx + c > 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	Нет решений	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (x_1; x_2)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$D < 0$	Нет решений	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x = x_0$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in [x_1; x_2]$	Рис. *в*)

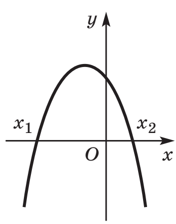
Решение квадратного неравенства при $a < 0$			
$ax^2 + bx + c < 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; x_0) \cup$ $\cup\, (x_0; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup\, (x_2; +\infty)$	Рис. *в*)
$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *а*)
	$D = 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	Рис. *б*)
	$D > 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup$ $\cup\, [x_2; +\infty)$	Рис. *в*)



а)



б)



в)

Примеры:

1) Решить неравенство $x^2 - x - 6 > 0$.

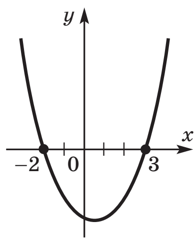
Решение.

$x^2 - x - 6 = 0$;

$D = 1 + 24 = 25$; $D > 0$;

$x_1 = \dfrac{1+5}{2}$; $x_1 = 3$;

$x_2 = \dfrac{1-5}{2}$; $x_2 = -2$.



На рисунке изображена парабола $y = x^2 - x - 6$, пересекающая ось абсцисс при $x_1 = 3$; $x_2 = -2$. Эта парабола лежит выше оси абсцисс в промежутках $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

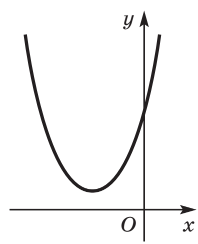
2) Решить неравенство $x^2 + 5x + 7 > 0$.

Решение.

$x^2 + 5x + 7 = 0$;

$D = 25 - 28 = -3$.

Так как $D < 0$, то парабола $y = x^2 + 5x + 7$ лежит выше оси абсцисс при любых значениях x.



Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

1.5.3. Рациональные неравенства и метод интервалов

<table>
<tr><td>

Метод интервалов используется для неравенств вида $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$, и для неравенств вида $p(x) > 0$, где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, а вместо знака $>$ могут быть использованы знаки $<$, $\geqslant$, $\leqslant$.

</td></tr>
<tr><td>

Алгоритм решения

</td></tr>
<tr><td>

1) Приравниваем к нулю каждый множитель (и в числителе, и в знаменателе, если дробное выражение).

2) Отмечаем полученные числа на координатной прямой.
• Если неравенство строгое (знаки $>$ или $<$), то все точки выколоты.
• Если неравенство нестрогое (знаки $\geqslant$, $\leqslant$), то выколотые точки будут только те, которые в знаменателе, а из числителя заштрихованные.

3) Расставляем знаки в промежутках между точками.
• Если перед переменной везде знак «+», значит в правом интервале ставим плюс, далее чередуем знаки справа налево.
• Если перед одной из переменных стоит знак минус, то в правом интервале ставим знак «−» и далее чередуем знаки справа налево.

4) Штрихуем промежутки в соответствии со знаком неравенства:
$>$, $\geqslant$ штрихуем там где «+»,
$<$, $\leqslant$ штрихуем там где «−».

5) Выписываем ответ.

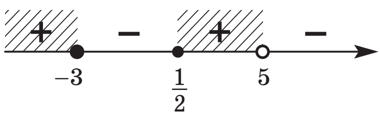
</td></tr>
</table>

Важно!

- Если среди множителей есть степени отличные от единицы, то все нечётные заменяем на 1 степень, а чётные на 2 степень
- Если есть множители с показателем степени 2, то они не влияют на знак неравенства, поэтому эти множители приравниваем к нулю и записываем отдельно от неравенства
- Если это значение переменной обращает всю дробь или все произведение в нуль и это нестрогое неравенство, то оно образует совокупность
- Если выражение с чётным показателем степени в знаменателе и неравенство строгое, то образуется система.

Примеры:

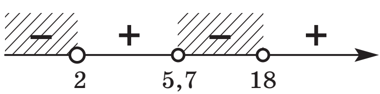
1) $\dfrac{(x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{5-x} \geqslant 0.$



Справа знак «–», так как в выражении $5 - x$ перед переменной x стоит «–».

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \left[\dfrac{1}{2}; 5\right)$.

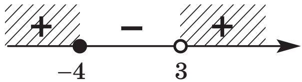
2) $(x - 5{,}7)(x - 18)(x - 2) < 0.$



Ответ: $(-\infty; 2) \cup (5{,}7; +\infty)$.

3) $\dfrac{x^2(x+4)}{x-3} \geqslant 0.$

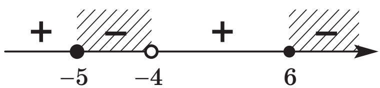
$x^2 = 0$; $x = 0$ или $\dfrac{x+4}{x-3} \geqslant 0.$



Ответ: $(-\infty; -4] \cup \{0\} \cup [3; +\infty).$

4) $\dfrac{(6-x)(x+5)}{(x-8)^2(x+4)} \leqslant 0.$

$$\begin{cases} x \neq 8, \\ \dfrac{(6-x)(x+5)}{(x+4)} \leqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $[-5; 4) \cup [6; 8) \cup (8; +\infty).$

1.5.4. Показательные неравенства

Решение простейших показательных неравенств				
	$0 < a < 1$		$a > 1$	
	$b \leqslant 0$	$b > 0$	$b \leqslant 0$	$b > 0$
$a^x < b$	Нет решений	$x > \log_a b$	Нет решений	$x < \log_a b$
$a^x \leqslant b$	Нет решений	$x \geqslant \log_a b$	Нет решений	$x \leqslant \log_a b$
$a^x \geqslant b$	$x \in \mathbf{R}$	$x \leqslant \log_a b$	$x \in \mathbf{R}$	$x \geqslant \log_a b$
$a^x > b$	$x \in \mathbf{R}$	$x < \log_a b$	$x \in \mathbf{R}$	$x > \log_a b$

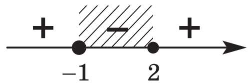
Методы решения показательных неравенств

1. Приведение степеней к одному основанию

Пример.

$7^{x^2} \leqslant 49 \cdot 7^x$; $7^{x^2} \leqslant 7^{2+x}$; $x^2 \leqslant 2 + x$;

$y = 7^x$ возрастает, т.к. $7 > 1$. $x^2 - x - 2 \leqslant 0$.

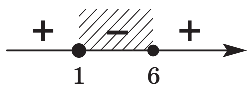


Ответ: $x \in [-1; 2]$.

2. Метод замены переменной

Пример.

$5^x + 6 \cdot 5^{-x} \leqslant 7$; $5^x + \dfrac{6}{5^x} \leqslant 7$; $5^x = t > 0$. Произведём замену. $t + \dfrac{6}{t} \leqslant 7$; $t^2 + 6 \leqslant 7t$; $t^2 - 7t + 6 \leqslant 0$.



$1 \leqslant 5^x \leqslant 6$; $0 \leqslant x \leqslant \log_5 6$.

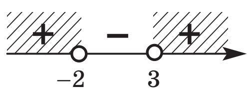
Ответ: $x \in [0; \log_5 6]$.

3. Однородные неравенства

Пример. $9^x - 15^x - 6 \cdot 25^x > 0 \,\Big|\, : 25^x$;

$\left(\dfrac{9}{25}\right)^x - \left(\dfrac{15}{25}\right)^x - 6 > 0$; $\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^x - 6 > 0$. Замена $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = t$.

$t^2 - t - 6 > 0$;



$\left(\dfrac{3}{5}\right)^x > 3$; $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x > \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\log_{\frac{3}{5}} 3}$; $y = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ убывает, т.к. $\dfrac{3}{5} < 1$;

$x < \log_{\frac{3}{5}} 3$.

Ответ: $x \in (-\infty; \log_{\frac{3}{5}} 3)$.

1.5.5. Логарифмические неравенства

Решение простейших показательных неравенств				
	$\log_a x \leqslant b$	$\log_a x < b$	$\log_a x \geqslant b$	$\log_a x > b$
$0 < a < 1$	$x \geqslant a^b$	$x > a^b$	$0 < x \leqslant a^b$	$0 < x < a^b$
$a > 1$	$0 < x \leqslant a^b$	$0 < x < a^b$	$x \geqslant a^b$	$x > a^b$

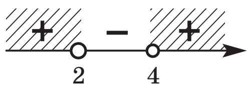
Методы решения логарифмических неравенств

1. Замена переменной

Пример.

$\log_3^2 x + 8 > 6\log_3 x$; $\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8 > 0$.

Замена: $\log_3 x = t$; $t^2 - 6t + 8 > 0$.



$\log_3 x < 2$ или $\log_3 x > 4$; $0 < x < 9$ или $x > 81$.

Ответ: $x \in (0; 9) \cup (81; +\infty)$.

2. Использование свойств логарифма

Пример.

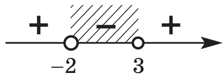
$\log_5 (6 - 6x) < \log_5 (x^2 - 5x + 4) + \log_5 (x + 3)$.

$$\begin{cases} \log_5 (6 \cdot (1 - x)) < \log_5 ((x - 1)(x - 4)(x + 3)), \\ 1 - x > 0, \\ (x - 1)(x - 4) > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases}$$

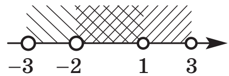
$y = \log_5 x$ возрастает, т.к. $5 > 1$.

$$\begin{cases} 6(1 - x) < (x - 1)(x - 4)(x + 3), \\ x - 1 < 0, \\ x - 4 < 0, \\ x + 3 < 0; \end{cases} \Bigg| : (x - 1) < 0$$

$$\begin{cases}(x-4)(x+3)+6<0,\\ -3<x<1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2-x-6<0,\\ -3<x<1;\end{cases}$$



$$\begin{cases}-2<x<3,\\ -3<x<1.\end{cases}$$



Ответ: $x \in (-2; 1)$.

1.5.6. Метод рационализации

Метод рационализации для решения неравенств (основан на монотонности функций)	
1) $\log_{h(x)} g(x) - \log_{h(x)} f(x)$ заменяем на:	$\begin{cases}\dfrac{g(x)-f(x)}{h(x)-1},\\ g(x)>0,\\ f(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$
Частные случаи	
А) $\log_{h(x)} g(x) - 1$ заменяем на:	$\begin{cases}\dfrac{g(x)-h(x)}{h(x)-1},\\ g(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$
Б) $\log_{h(x)} g(x)$ заменяем на:	$\begin{cases}\dfrac{g(x)-1}{h(x)-1},\\ g(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$
2) $g(x)^{f(x)} - g(x)^{h(x)}$ заменяем на:	$\begin{cases}\dfrac{f(x)-h(x)}{g(x)-1},\\ g(x)>0.\end{cases}$
3) $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ заменяем на:	$\begin{cases}f(x)-g(x),\\ f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}$

Примеры:

1) $\log_{x+2}(2x+3)-\log_{x+2}(5-x)\leqslant 0$ заменяем на:

$$\begin{cases}\dfrac{2x+3-(5-x)}{x+2-1}\leqslant 0,\\ 2x+3>0,\\ 5-x>0,\\ x+2>0.\end{cases}$$

2) $\log_{x}(3x^2-1)\geqslant 1$ заменяем на: $\begin{cases}\dfrac{3x^2-1-x}{x-1}\geqslant 0,\\ 3x^2-1>0,\\ x>0.\end{cases}$

3) $\log_{7-x}(2x+11)>0$ заменяем на: $\begin{cases}\dfrac{2x+11-1}{7-x-1}>0,\\ 2x+11>0,\\ 7-x>0.\end{cases}$

4) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+2}-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-3}<0$ заменяем на: $\dfrac{x+2-(x-3)}{\dfrac{1}{5}-1}<0.$

5) $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+2x}>0$ заменяем на:

$$\begin{cases}x^2-2x+3-(x^2+2x)>0,\\ x^2-2x+3\geqslant 0,\\ x^2+2x\geqslant 0.\end{cases}$$

6) $\dfrac{(\log_{5x-1}x^2-\log_{5x-1}x^3)(\sqrt{2x}-\sqrt{x+1})}{\log_{x+2}(6x-2)}\geqslant 0$ заменяем:

$$\begin{cases}\dfrac{\dfrac{x^2-x^3}{5x-1-1}\cdot(2x-(x+1))}{\dfrac{6x-2-1}{x+2-1}}\geqslant 0,\\ x^2>0,\\ x^3>0,\\ 5x-1>0,\\ 2x\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0,\\ 6x-2>0,\\ x+2>0.\end{cases}$$

1.5.7. Системы неравенств с одной переменной

Решение системы неравенств с одной переменной — значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Примеры

1) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x - 5 \geqslant 9, \\ 2x < 8. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 7x - 5 \geqslant 9, \\ 2x < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x \geqslant 14, \\ 2x < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 4. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Ответом служит их пересечение.

Ответ: [2; 4).

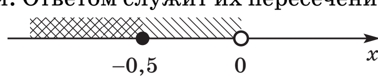
2) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2 - 10x \geqslant 7, \\ 3x + 4 \leqslant 4. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2 - 10x \geqslant 7, \\ 3x + 4 \leqslant 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -10x \geqslant 5, \\ 3x \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant -0{,}5, \\ x \leqslant 0. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Ответом служит их пересечение.



Ответ: (–∞; –0,5].

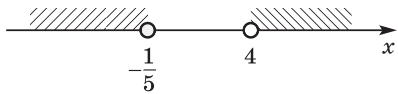
3) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x + 7 > 19, \\ 2 - 5x > 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 3x + 7 > 19, \\ 2 - 5x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 12, \\ -5x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Пересечений нет, значит, система не имеет решений.



Ответ: нет решений.

4) Решить неравенство: $-6 < 3x - 5 < 8$.

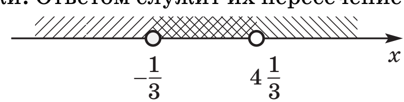
Решение.

1 способ.

Данное двойное неравенство $-6 < 3x - 5 < 8$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 3x - 5 > -6, \\ 3x - 5 < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 5 - 6, \\ 3x < 8 + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > -1, \\ 3x < 13; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\dfrac{1}{3}, \\ x < 4\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой числовые промежутки. Ответом служит их пересечение.



Ответ: $x \in \left(-\dfrac{1}{3}; 4\dfrac{1}{3}\right)$.

2 способ.
Данное двойное неравенство можно решить, не преобразуя его в систему неравенств.

$-6 < 3x - 5 < 8$; $-6 + 5 < 3x < 8 + 5$; $-1 < 3x < 13$;

$-\frac{1}{3} < x < \frac{13}{3}$; $-\frac{1}{3} < x < 4\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3}\right)$.

1.6. Текстовые задачи и методы их решения

1.6.1. Решение текстовых задач арифметическим способом

Решение текстовых задач по действиям

↓

Решение задачи по действиям

↓

Краткое условие

↓

Действие и его результат

↓

Единицы измерения и пояснения

↓

Ответ

Примеры:

1) Между городами A и B расстояние 600 км. Из города A в город B выехал мотоциклист со скоростью 50 км/ч, на два часа позже из города B в город A выехал автомобилист со скоростью 75 км/ч. На каком расстоянии от города B встретятся мотоциклист и автомобилист?

Решение.
Скорость v мот. — 50 км/ч;
скорость v авт. — 75 км/ч.

1. $50 \cdot 2 = 100$ (км) — мотоциклист проехал за 2 часа;

2. $600 - 100 = 500$ (км) — расстояние между мотоциклистом и автомобилистом в момент начала движения;

3. $50 + 75 = 125$ (км/ч) — скорость сближения автомобилиста и мотоциклиста;

4. $500 : 125 = 4$ (ч) — время до встречи;

5. $75 \cdot 4 = 300$ (км) — расстояние от пункта B до места встречи.

Ответ: 300 км.

2) Две трубы заполняют бассейн за 1 ч 12 мин. Одна вторая труба заполняет бассейн за 3 ч. За сколько часов заполнит бассейн одна первая труба?

Решение.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Первая труба — ? ч,}\\ \text{вторая труба — за 3 ч,}\\ \text{две трубы — за 1 ч 12 мин.}\end{array}\right\}\text{1 бассейн}$$

$$1\text{ ч }12\text{ мин} = 1\text{ ч} + \frac{12}{60}\text{ ч} = 1\frac{1}{5}\text{ ч} = \frac{6}{5}\text{ ч.}$$

1) $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (басс./ч) — вторая труба заполняет за час;

2) $1 : \frac{6}{5} = \frac{5}{6}$ (басс./ч) — первая и вторая труба вместе за час;

3) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (басс./ч) первая труба за час;

4) $1 : \frac{1}{2} = 2$ (ч) — время работы первой трубы.

Ответ: 2 ч.

3) Мимо пешехода, идущего вдоль железнодорожных путей со скоростью 4 км/ч, в том же направлении проезжает поезд со скоростью 64 км/ч. Длина поезда — 500 м. За сколько секунд поезд проедет мимо пешехода?

Решение.
v пешехода — 4 км/ч;
v поезда — 64 км/ч.
1) $64 - 4 = 60$ (км/ч) — скорость поезда относительно пешехода;
2) 60 км/ч = 1 км/мин = 1000 м/мин;
3) $500 : 1000 = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$ (мин) = 30 (с) — время движения поезда мимо пешехода.

Ответ: 30 с.

1.6.2. Решение текстовых задач алгебраическим методом

Решение текстовых задач алгебраическим методом — это решение задач с помощью уравнений и систем уравнений.

Алгоритм решения

1. Составить таблицу:

а) в одной из колонок таблицы обозначить одну величину переменной, например, x;

б) в другую колонку таблицы вписать известную величину из условия;

в) с помощью уже заполненных двух колонок таблицы получить выражение с переменной и записать его в свободную колонку.

2. С помощью выражений из таблицы составить уравнение.

3. Решить уравнение.

4. Записать в ответ числа, соответствующие вопросу задачи.

Примеры:

1) Теплоход прошёл 30 км против течения реки, затем 40 км по течению. Общее время движения составило 5 часов. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде.

Решение. Пусть x км/ч — скорость теплохода в неподвижной воде.

	Скорость	**Время**	**Расстояние**
I (против течения)	$(x-5)$ км/ч	$\frac{30}{x-5}$ ч	30 км
II (по течению)	$(x+5)$ км/ч	$\frac{40}{x+5}$ ч	40 км

$$\frac{30}{x-5}+\frac{40}{x+5}=5 \quad \Big| : 5$$

$$\frac{6^{\backslash x+5}}{x-5}+\frac{8^{\backslash x-5}}{x+5}=1^{\backslash x^2-25} \quad \Big| \cdot (x-5)(x+5) \neq 0,\ x \neq -5,\ x \neq 5.$$

$\underline{6x} + 30 + \underline{8x} - 40 = x^2 - 25;$

$x^2 - 14x - 15 = 0;$

$x_1 = -1,\ x_2 = 15.$

Ответ: 15 км/ч.

2) Одна первая труба заполняет бассейн за 2 ч, а одна вторая труба — за 3 ч. Найдите, за сколько часов заполняют бассейн обе трубы одновременно.

Решение.

	Производительность	**Время**	**Работа**
I (одна первая труба)	$\frac{1}{2}$ басс./ч	2 ч	1 басс.
II (одна вторая труба)	$\frac{1}{3}$ басс./ч	3 ч	1 басс.
I + II (обе трубы)	$\frac{1}{x}$ басс./ч	x ч	1 басс.

$$\frac{1}{2}^{\backslash 3x}+\frac{1}{3}^{\backslash 2x}=\frac{1}{x}^{\backslash 6} \quad \Big| \cdot 6x$$

$3x + 2x = 6;\ 5x = 6;$

$x = \frac{6}{5};\ x = 1{,}2.$

Ответ: 1,2 часа.

Текстовые задачи на среднее значение
1. Средняя скорость. 2. Средняя стоимость. 3. Концентрация раствора. 4. Процентное содержание сплава. 5. Средняя оценка. 6. Средняя производительность. Сходство этих задач состоит в том, что суммируются величины во второй и третьей колонках. **Важно!** Значения во второй и третьей колонках не принципиальны для среднего значения первой колонки, их можно заменять на пропорциональные числа.

	A	**B**	**C**
I	p_1	m_1	p_1m_1
II	p_2	m_2	p_2m_2
IIIср	$p_{ср}$	$m_1 + m_2$	$p_{ср}m_1 + p_{ср}m_2$
	Скорость Цена Концентрация Процентное содержание Оценки Производительность	Время Количество Масса раствора Масса сплава Количество оценок Время	Путь Стоимость Масса вещества Масса вещества Сумма оценок Объём работ

$$p_1 m_1 + p_2 m_2 = p_{ср} m_1 + p_{ср} m_2$$
$$(p_1 - p_{ср}) m_1 = (p_{ср} - p_2) m_2$$
$$\frac{p_1 - p_{ср}}{p_{ср} - p_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Примеры:

Возьмём задачи с разными условиями, но с одинаковыми переменными, уравнением и ответом.

1. Автомобилист за 8 часов проехал весь путь. Часть времени он ехал со скоростью 50 км/ч, оставшееся время со скоростью 30 км/ч. Средняя скорость составила 45 км/ч. Сколько времени он ехал со скоростью 30 км/ч?

2. Купили 2 вида товара по цене 50 руб. за килограмм и 30 руб. за килограмм. Средняя цена составила 45 руб. за килограмм. Всего купили 8 кг товара. Сколько купили килограммов товара по цене 30 руб. за килограмм?

3. В одном сосуде 50%-ный раствор кислоты, а в другом 30%-ный раствор этой же кислоты. Растворы смешали в третьем сосуде, где получилось 8 кг 45% раствора кислоты. Сколько было кислоты в сосуде с 30%-ным раствором?

4. Имеется два сплава с разным содержанием никеля: в первом содержится 50% никеля, а во втором 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав, в котором никеля 45%. Масса третьего сплава 8 кг. Какова масса сплава с 30% содержанием никеля?

5. Ученик получил 8 отметок по 50 баллов и по 30 баллов. Сколько должно быть 30-балльных отметок, чтобы средняя отметка была равна 45 баллам?

6. Рабочий за 8 часов изготовил некоторое количество деталей. Часть времени он изготавливал по 50 деталей в час, остальное время — по 30 деталей в час. В среднем получилось 45 деталей в час. Сколько времени у рабочего была производительность 30 деталей в час?

Решение.
Используем обозначения из таблицы на стр. 78.
$p_1 = 50$, $p_2 = 30$, $p_{ср} = 45$, $p_2 < p_{ср} < p_1$, $30 < 45 < 50$.
Найти m_2.
Составим уравнение по формуле:
$\frac{50-45}{45-30} = \frac{m_2}{m_1}$; $\frac{5}{15} = \frac{m_2}{m_1}$; $\frac{1}{3} = \frac{m_2}{m_1}$;
$m_2 = x$, $m_1 = 3x$;
$x + 3x = 8$;
$4x = 8$;
$x = 2$, т.е. $m_2 = 2$.
Ответ: 2.

• Если в колонке **В** все числа одинаковые, то $p_{ср}$ находят как среднее арифметическое p_1 и p_2, $p_{ср} = \frac{p_1 + p_2}{2}$.

• Если в колонке **С** все числа одинаковые, то $p_{ср}$ находят как среднее гармоническое, $p_{ср} = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}$.

Такой результат получают из уравнений:

$\frac{2}{p_{ср}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ или $\frac{p_1 - p_{ср}}{p_{ср} - p_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Секреты ЕГЭ

В открытом банке математических задач ЕГЭ профильного уровня в заданиях № 11 (текстовые задачи) встречаются задачи на движение и на работу, в которых разность скоростей (производительность) и разность времени одни и те же числа. Легко доказать, что такое возможно, если скорости (производительность) первого и второго объекта равны времени второго и первого соответственно. Поэтому решать подобные задачи следует подбором, составив уравнение $x(x + a) = c$, где x меньшая скорость, а $x + a$ — бóльшая. Далее читаем вопрос задачи.

Примеры:

1) Скорость одного туриста на 2 км/ч больше скорости другого туриста, а расстояние 24 км он проходит на 2 часа быстрее. Найти скорость второго туриста.

Решение. Составим уравнение $x(x + 2)= 24$, где x — скорость второго туриста, а $x + 2$ — скорость первого туриста (которая в данном типе задач численно равна времени второго туриста). Подбираем:
$x = 4$, т. к. $4 \cdot 6 = 24$, $6 = 4 + 2$.
Ответ: 4 км/ч скорость второго туриста.

2) Один рабочий за час делает на 6 деталей меньше второго и изготавливает 216 деталей на 6 часов дольше. Сколько деталей в час изготавливает 2 рабочий?

Решение. Составим уравнение $x(x + 6) = 216$. Подбираем $x = 12$, $x + 6 = 12 + 6 = 18$.
Ответ: 18 деталей в час.

1.6.3. Решение текстовых задач графическим методом

Иногда вместо привычных арифметического и алгебраического метода решения задач удобно применить **графический метод**.

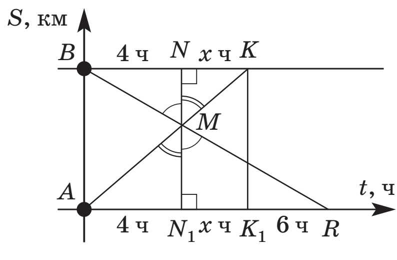
Рассмотрим на примере задачи на движение.

Пример.

Автомобилист и велосипедист выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B. Велосипедист приехал в город A на 6 часов позже, чем автомобилист прибыл в город B. Встретились они через 4 часа после выезда. Сколько часов затратил на путь из города B в город A велосипедист?

Решение.

Изобразим условие задачи на координатной плоскости, где вертикальная ось покажет перемещение в км, а горизонтальная ось время в часах.



AB — расстояние от A до B,

$BN = AN_1 = 4$ ч — время до встречи,

$NK = N_1K_1 = x$ ч — время движения автомобилиста от места встречи до города B,

$K_1R = 6$ ч.

$\Delta BNM \sim \Delta N_1MR$ и $\Delta NKM \sim \Delta AMN_1$ — признак подобия прямоугольных треугольников по одному острому углу. $k = \dfrac{N_1M}{NM}$ — коэффициент подобия для обоих пар подобных треугольников. Составим уравнение: $\dfrac{x+6}{4} = \dfrac{4}{x}$; $x^2 + 6x = 16$, $x^2 + 6x - 16 = 0$, $x_1 = -8$; $x_2 = 2$. Время велосипедиста: $4 + x + 6 = 4 + 2 + 6 = 12$ ч. *Ответ*: 12 ч.

1.7. Прогрессии

1.7.1. Арифметическая прогрессия

Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность прогрессии): $a_{n+1} = a_n + d;\ d = a_{n+1} - a_n$	
Формула n-го члена через a_1	$a_n = a_1 + d(n-1)$
Формула n-го члена через a_m	$a_n = a_m + d(n-m)$, $n > m$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n-й)	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
Формула суммы n первых членов (через первый член и разность)	$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$
Характеристическое свойство	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

1.7.2. Геометрическая прогрессия

Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель прогрессии): $$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad q \neq 0$$ $$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$	
Формула n-го члена через b_1	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формула n-го члена через b_m	$b_n = b_m \cdot q^{n-m}$, $n > m$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n-й)	$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и знаменатель)	$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$
Характеристическое свойство	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
Сумма бесконечной геометрической прогрессии	$S = \dfrac{b_1}{1 - q}$, $\lvert q \rvert < 1$

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2.1. Функции

2.1.1. Функция, область определения функции, множество значений функции

Функция — это такая зависимость переменной y от переменной x, когда каждому x поставлено в соответствии единственное значение y. При этом: x — независимая переменная (аргумент); y — зависимая переменная (функция).
Обозначение функции: $y = f(x)$
Область определения функции $D(f)$ — это все значения, которые принимает независимая переменная x, при этом если функция задана формулой и не указана её область определения, то считают, что область определения функции состоит из всех значений аргумента, при которых данная формула имеет смысл. Если же функция описывает реальный процесс, то её область определения зависит от конкретных условий. *Например*, $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$, $D(f) = (-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; $S(a) = a^2$, $D(S) = (0;\ +\infty)$, S — площадь квадрата, a — длина стороны квадрата.
Область значений функции $E(f)$ — множество, которое состоит из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f.

2.1.2. График функции

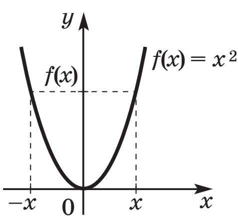
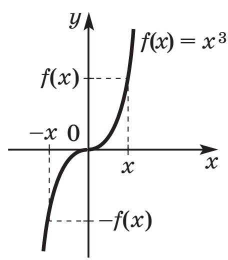
График функции — множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

2.1.3. Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат

Преобразования графиков
• График функции $y = f(x) + n$ получают смещением графика функции $y = f(x)$ на величину n вдоль оси Oy. При $n > 0$ график смещают вверх, при $n < 0$ — вниз;
• График функции $y = kf(x)$ при $k > 1$ получают из графика функции $y = f(x)$ растяжением от оси Ox в k раз, а при $0 < k < 1$ — сжатием к оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз;
• График функции $y = f(x + m)$ получают смещением графика функции $y = f(x)$ на величину m вдоль оси Ox. На месте остаются только точки пересечения графика с осью Ox;
• График функции $y = f(px)$ при $p > 1$ получают из графика функции $y = f(x)$ сжатием к оси Oy в p раз, а при $0 < p < 1$ — растяжением от оси Oy в $\frac{1}{p}$ раз. На месте остаются только точки пересечения графика с осью Oy.

2.2. Элементарное исследование функций

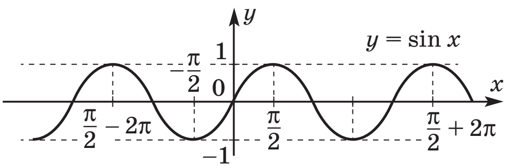
2.2.1. Чётность и нечётность функций

Чётная функция — функция f с областью определения $D(f)$, симметричной относительно начала координат, для которой при любом x из $D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. *Например*, $f(x) = x^2$ — чётная, так как $(-x)^2 = x^2$.  График чётной функции симметричен относительно оси ординат.	**Нечётная функция** — функция f с областью определения $D(f)$, симметричной относительно начала координат, для которой при любом x из $D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. *Например*, $f(x) = x^3$ — нечётная, так как $(-x)^3 = -x^3$.  График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

2.2.2. Периодичность функций

Периодическая функция — функция f с областью определения $D(f)$, для которой при любом x из $D(f)$ $x + T$ также принадлежит $D(f)$ и выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$, где T — **период.**

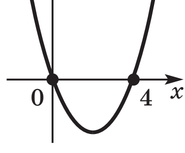
Например, $f(x) = \sin x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
Период $T = 2\pi$.



2.2.3. Нули функции, промежутки знакопостоянства

Нули функции — значения x, при которых значения функции равны нулю.

Например,
$x = 0$ и $x = 4$ — нули функции $f(x) = x^2 - 4x$.



Промежутки знакопостоянства — промежутки, на которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения.
Например, для функции $f(x) = \dfrac{6}{x}$, $f(x) > 0$ при $x \in (0; +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

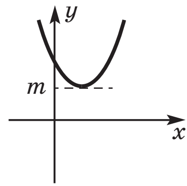
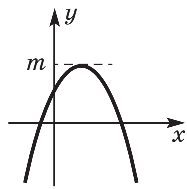
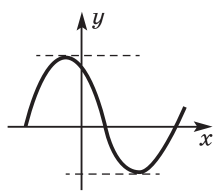
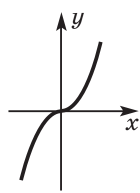
2.2.4. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания

Промежутки монотонности — промежутки, на которых функция постоянно возрастает или постоянно убывает.	
• Функция f **возрастает** на множестве G, если для любых x_1 и x_2 из множества $G \subset D(f)$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$.	• Функция f **убывает** на множестве G, если для любых x_1 и x_2 из множества $G \subset D(f)$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$.

2.2.5. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции

Точка минимума функции f — точка x_0, такая, что для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется условие: $f(x) \geqslant f(x_0)$.	**Точка максимума функции f** — точка x_0, такая, что для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется условие: $f(x) \leqslant f(x_0)$.
Точки экстремума — общее название точек максимума и минимума.	

2.2.6. Ограниченность функции

Функция называется ограниченной снизу, если все значения функции не меньше некоторого числа m (т.е. $y(x) \geqslant m$).	
Функция называется ограниченной сверху, если все значения функции не больше некоторого числа m (т.е. $y(x) \leqslant m$).	
Если функция ограничена и снизу, и сверху, то она называется **ограниченной**.	
Неограниченная функция	

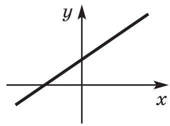
2.3. Основные элементарные функции

2.3.1. Линейная функция, её график

Линейная функция $y = kx + b$

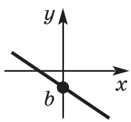
Область значения $k \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y \in (-\infty; +\infty)$; $k = 0 \Rightarrow y = b$

График — прямая



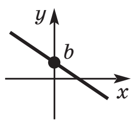
Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

$k < 0,\ b < 0$



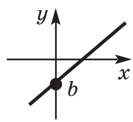
Убывает $k < 0$

$k < 0,\ b > 0$



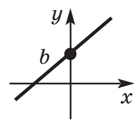
Убывает $k < 0$

$k > 0,\ b < 0$



Возрастает $k > 0$

$k > 0,\ b > 0$

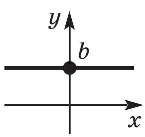


Возрастает $k > 0$

Частные случаи линейной функции

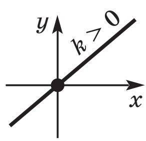
$k = 0$

Постоянная функция $y = b$



$k \neq 0,\ b = 0$

Прямая пропорциональность $y = kx$



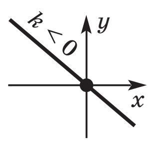
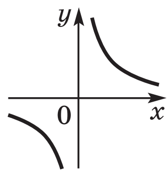


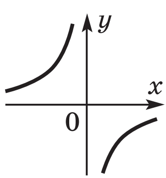
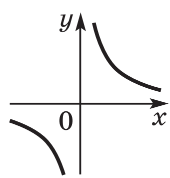
График — прямая, симметричная относительно начала координат

2.3.2. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график

Функция — обратная пропорциональность

$$\boldsymbol{y = \frac{k}{x}, \ k \neq 0.}$$

Область значений	График — **гипербола.**	Область определения
$y \neq 0$	 Кривая, ветви которой симметричны относительно начала координат $y(-x) = -y(x)$	$x \neq 0$

$k < 0$	$k > 0$
	

2.3.3. Квадратичная функция, её график.

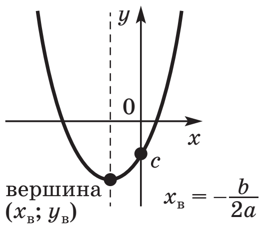
Квадратичная функция
$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0}$

Область значений

$a > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow [y_в; +\infty)$;
$a < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-\infty; y_в]$

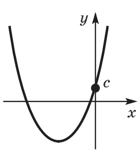
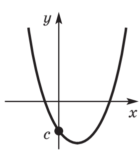
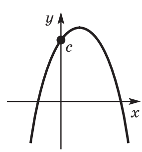
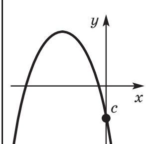
$y_в$ — значение функции в вершине параболы

График — **парабола** — кривая, симметричная относительно вертикальной прямой, проходящей через её вершину.



Область определения

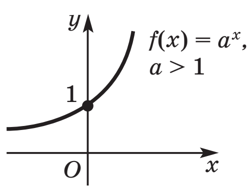
$x \in (-\infty; +\infty)$

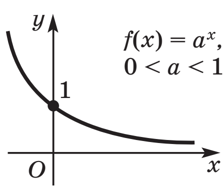
$a > 0,\ c > 0$	$a > 0,\ c < 0$	$a < 0,\ c > 0$	$a < 0,\ c < 0$
ветви параболы направлены вверх	ветви параболы направлены вверх	ветви параболы направлены вниз	ветви параболы направлены вниз
			

2.3.4. Показательная функция, её график

Показательная функция — функция вида $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

- Область определения: $D(f) = R$.
- Область значений: $E(f) = (0; \infty)$.
- Чётность, нечётность: функция не является ни чётной, ни нечётной.
- Нулей нет.
- Промежутки знакопостоянства: $f(x) > 0$ при $x \in R$.
- Промежутки монотонности: если $0 < a < 1$, то функция убывает при $x \in R$; если $a > 1$, то функция возрастает при $x \in R$.
- Экстремумов нет.
- График функции проходит через точку $(0; 1)$.
- Асимптота: $f(x) = 0$.





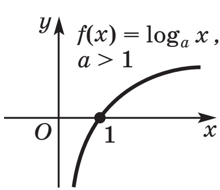
2.3.5. Логарифмическая функция, её график

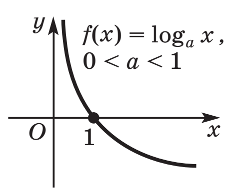
Логарифмическая функция — функция вида $f(x) = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

- Область определения: $D(f) = (0; \infty)$.
- Область значений: $E(f) = R$.
- Чётность, нечётность: функция не является ни чётной, ни нечётной.
- Нули: если $f(x) = 0$, то $x = 1$.
- Промежутки знакопостоянства:

  – если $0 < a < 1$, то $f(x) > 0$ при $x \in (0; 1)$, $f(x) < 0$ при $x \in (1; \infty)$;

  – если $a > 1$, то $f(x) > 0$ при $x \in (1; \infty)$, $f(x) < 0$ при x $(0; 1)$.
- Промежутки монотонности: если $0 < a < 1$, то функция убывает при $x \in (0; \infty)$; если $a > 1$, то функция возрастает при $x \in (0; \infty)$.
- Экстремумов нет.
- График функции проходит через точку $(1; 0)$.
- Асимптота: $x = 0$.

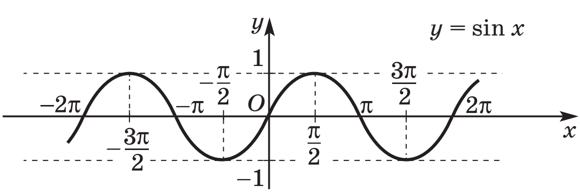




2.3.6. Тригонометрические функции, их графики

Функция $y = \sin x$

- График — **синусоида**.
- Область определения: $D(f) = R$.
- Область значений: $E(f) = [-1; 1]$.
- Чётность, нечётность: функция нечётная.
- Периодичность: функция периодическая.
- Период: $T = 2\pi$.
- Нули: $\sin x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Промежутки знакопостоянства: $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$;
$\sin x < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Промежутки монотонности: функция возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Экстремумы: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $f(x)_{\min} = -1$.
$x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $f(x)_{\max} = 1$.



Функция $y = \cos x$

• График — синусоида, сдвинутая на величину $\frac{\pi}{2}$ влево.

• Область определения: $D(f) = R$.

• Область значений: $E(f) = [-1; 1]$.

• Чётность, нечётность: функция чётная.

• Периодичность: функция периодическая.

• Период: $T = 2\pi$.

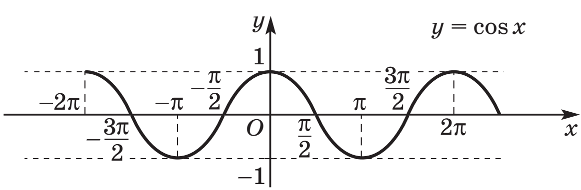
• Нули: $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Промежутки знакопостоянства: $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;
$\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Промежутки монотонности: функция возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$; функция убывает при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$.

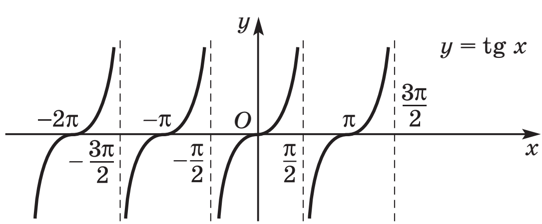
• Экстремумы: $x_{\min} = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $f(x)_{\min} = -1$.

• $x_{\max} = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $f(x)_{\max} = 1$.



Функция $y = \text{tg}\, x$

- График — **тангенсоида**.
- Область определения: $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Область значений: $E(f) = R$.
- Чётность, нечётность: функция нечётная.
- Периодичность: функция периодическая.
- Период: $T = \pi$.
- Нули: $\text{tg}\, x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Промежутки знакопостоянства: $\text{tg}\, x > 0$ при $x \in (\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$;
$\text{tg}\, x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Промежутки монотонности: функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.
- Экстремумов нет.
- Асимптоты: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.



Функция $y = \mathrm{ctg}\, x$

• График — тангенсоида, перенесенная на $\frac{\pi}{2}$ вправо и симметрично отраженная относительно оси Ох.

• Область определения: $D(f) = (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Область значений: $E(f) = R$.

• Чётность, нечётность: функция нечётная.

• Периодичность: функция периодическая.

• Период: $T = \pi$.

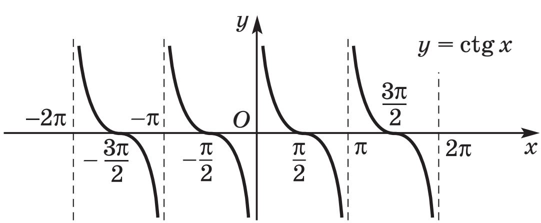
• Нули: $\mathrm{ctg}\, x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Промежутки знакопостоянства: $\mathrm{ctg}\, x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;
$\mathrm{ctg}\, x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Промежутки монотонности: функция убывает при $x \in (\pi n; \pi + \pi \mathrm{n})$, $n \in \mathbf{Z}$.

• Экстремумов нет.

• Асимптоты: $x = \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.



2.4. Производная

2.4.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной

Производная функции f в точке x_0 — это число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю.

Геометрический смысл производной: производная функции в точке равна тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в этой точке с положительным направлением оси абсцисс.

Производная функции $f(x)$ по переменной x — это мгновенная скорость изменения функции (любой).

Например, $S = a^2$, сторона квадрата меняется от 1 до 4: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, а площадь квадрата S растёт быстрее: $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$, $S_4 = 16$, т.е. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 1$, а $S_2 - S_1 = 3$, $S_3 - S_2 = 5$, $S_4 - S_3 = 7$. Мы видим, что площадь S растёт с большей скоростью при увеличении стороны квадрата. Скорость, соответственно, производная, может быть как положительной, так и отрицательной или равняться нулю. Значения производной зависят только от изменения функции, $\Delta f > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, $\Delta f < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, $\Delta f = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$.

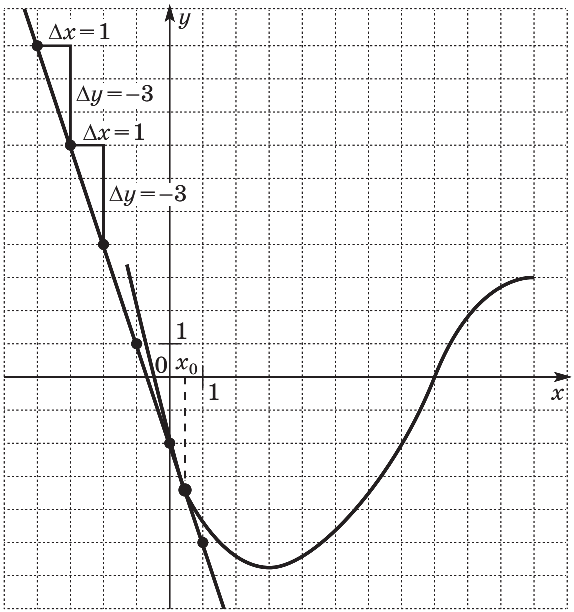
Изменение аргумента Δx всегда рассматриваем как положительное число, т.е. $\Delta x > 0$.

С помощью производной можно исследовать функцию на монотонность, на максимумы и минимумы (экстремумы).

Секреты ЕГЭ

Производная в точке x_0 равна производной касательной (прямой), у которой она постоянное число.

Например, на рисунке $f'(x_0) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{-3}{1} = -3.$



2.4.2. Физический смысл производной

Физический смысл производной: производная от координаты материальной точки по времени есть значение мгновенной скорости в данный момент времени.

2.4.3. Уравнение касательной к графику функции

Касательная к графику функции f, дифференцируемой в точке x_0, — прямая, которая проходит через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеет угловой коэффициент $f'(x_0)$.

Уравнение касательной имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где $(x_0; f(x_0))$ — координаты точки, через которую проходит касательная.

2.4.4. Производные суммы, разности, произведения, частного

Производная суммы или разности функций	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Производная произведения	$(uv)' = u'v + v'u$
Производная частного	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
Постоянный множитель C можно вынести за знак производной	$(Cu)' = Cu'$

2.4.5. Производные основных элементарных функций

Функция $f(x)$	**Производная $f'(x)$**
C	0
$kx + b$	k
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Функция $f(x)$	**Производная $f'(x)$**
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$

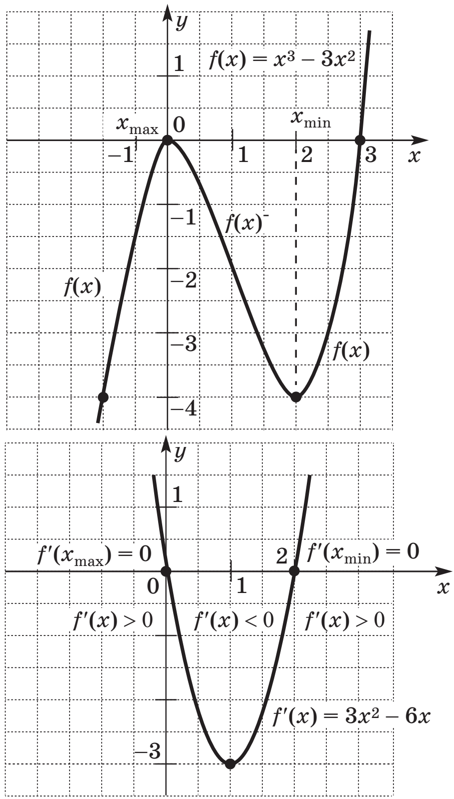
2.5. Исследование функций с помощью производной

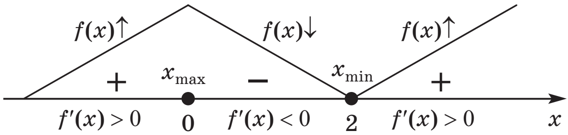
2.5.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Признаки возрастания (убывания) функции
Достаточный признак возрастания функции состоит в том, что функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, если производная функции $f'(x)$ на этом промежутке неотрицательна, т.е. $f(x)$ возрастает при $f'(x) \geqslant 0$. **Достаточный признак убывания функции** состоит в том, что функция $f(x)$ убывает на некотором промежутке, если производная $f'(x)$ на этом промежутке неположительна, т.е. $f(x)$ убывает при $f'(x) \leqslant 0$.

Точки экстремума функции — это внутренние точки области определения функции $f(x)$, в которых:

1) $f'(x) = 0$ или не существует,
2) $f'(x)$ меняет знак:
   а) в $x_{\max}$ с плюса на минус;
   б) в $x_{\min}$ с минуса на плюс.



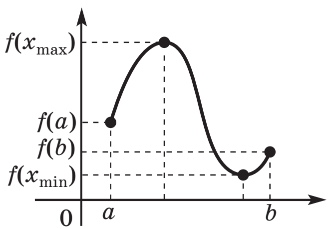


$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $3x^2 - 6x = 0$; $x(3x - 6) = 0$; $x = 0$ или $3x - 6 = 0$, $x = 2$.

Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего **наибольшего и наименьшего значения на этом отрезке** либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

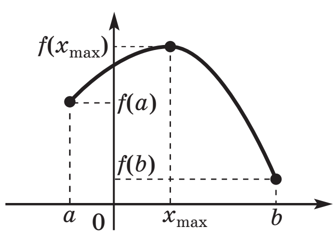
Примеры:

1)



$\max_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\max})$; $\min_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\min})$.

2)



$\max_{[a;\,b]} f(x) = f(x_{\max})$; $\min_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$, непрерывной на отрезке

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти точки, где $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

3. Изобразить эти точки на координатной прямой, расставить знаки производной между ними «+» или «−». (Если перед x стоят знаки «+», то в правом промежутке ставим «+», далее знаки чередуются, кроме точек, образованных кратными корнями).

4. Далее отмечаем промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$ в соответствии со знаком производной.

5. Отмечаем на прямой концы отрезка и определяем $\max f(x)$ на отрезке или $\min f(x)$ на этом отрезке.

6. Если в предыдущем пункте наибольшее или наименьшее значения функции не удалось получить однозначно, то подставляем соответствующее значение x, точек экстремума и концов отрезка в функцию $f(x)$, чтобы сравнить их значения и выбрать наибольшее или наименьшее.

Секреты ЕГЭ

В открытом банке математических задач ЕГЭ профильного уровня в заданиях № 12 (наибольшее и наименьшее значение функции, точки экстремума) встречаются задания с логарифмами, степенью, числом e, тригонометрией, в которых надо найти наибольшее или наименьшее значения функции.

Если внимательно изучить данные примеры, при этом понимая, что ответ возможен только в виде целого числа или конечной десятичной дроби, то можно заметить, что в этих случаях легко находить значения x без взятия производной. Обычно в таких случаях значение переменной x единственное, которое позволяет получить ответ в нужном виде (целое число или конечная десятичная дробь).

Примеры:

1) Найдите наименьшее значение функции:
$y = 12x - \ln(x + 11)^{12}$ на отрезке $[-10{,}5; 0]$.
Решение. Сначала нужно избавиться от натурального логарифма: $\ln 1 = 0$, значит, $x = -10$, тогда $y = 12(-10) - \ln(-10 + 11)^{12} = -120 - \ln 1^{12} = -120$.
Ответ: -120.

2) Найдите наименьшее значение функции:
$y = (x - 14)e^{x-13}$ на отрезке $[12; 14]$.
Решение. Избавляемся от иррациональности числа e.
$e^0 = 1$, значит, берём $x = 13$, тогда $y = (13 - 14)e^{13-13} =$
$= -1 \cdot e^0 = -1$.
Замечаем, что можно было взять за x и число 14. В этом случае ответ 0 не является наименьшим.
Ответ: -1.

3) Найдите наибольшее значение функции:
$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
Решение. Нужно избавиться от иррациональности числа π. Возьмём $x = \frac{\pi}{4}$ и получаем $y = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} +$
$+ 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \pi + 4 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi - \pi + 4 = 4 + 4 = 8$.
Ответ: 8.

При нахождении точек экстремума и наибольшего и наименьшего значений сложных монотонных функций, где под знаком логарифма, под корнем или в показателе степени стоит квадратичная функция, мы находим x вершины параболы, это и будет точка экстремума.

Если необходимо найти наибольшее или наименьшее значение функции, то, подставив этот x в данную функцию, находим y. Вершину параболы можно найти по формуле $x = -\frac{b}{2a}$. Можно также воспользоваться способом нахождения производной от квадратичной функции, приравняв её к нулю, а затем найти значения x.

Примеры:

1) Найдите точку минимума функции:
$y = \log_2 (x^2 - 14x + 72) - 8$.
Решение.
$(x^2 - 14x + 72)' = 2x - 14$; $2x - 14 = 0$; $x = 7$.
Ответ: 7.

2) Найдите наименьшее значение функции:
$y = 2^{x^2 + 8x + 18}$.
Решение.
$(x^2 + 8x + 18)' = 2x + 8$; $2x + 8 = 0$; $x = -4$.
$y(-4) = 2^{(-4)^2 + 8(-4) + 18} = 2^2 = 4$.
Ответ: 4.

3) Найдите наибольшее значение функции:
$y = \sqrt{31 - 30x - x^2}$.
Решение.
$(31 - 30x - x^2)' = -30 - 2x$; $-30 - 2x = 0$; $2x = -30$;
$x = -15$. $y(-15) = \sqrt{31 - 30(-15) - (-15)^2} =$
$= \sqrt{31 + 450 - 225} = \sqrt{256} = 16$.
Ответ: 16.

2.6. Первообразная

2.6.1. Первообразные элементарных функций

Первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке — такая функция $F(x)$, что для любого x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.
Основное свойство первообразных
Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.
Правила нахождения первообразных
• Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для функции $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$. • Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а k — постоянная, то $kF(x)$ есть первообразная для функции $kf(x)$. • Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а k и b — постоянные, причём $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для функции $f(kx + b)$.

Первообразные для некоторых функций	
Функция $f(x)$	**Первообразная $F(x)$**
0	C
k	$kx + C$
x^{α}	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

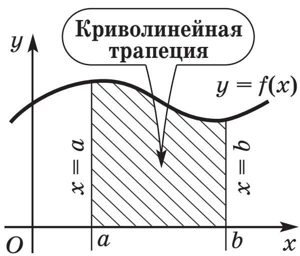
2.6.2. Площадь криволинейной трапеции

Криволинейная трапеция — фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (причём функция не меняет знак для всех $x \in [a; b]$), двумя вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, а также осью Ox.

Теорема для вычисления площади криволинейной трапеции

Если $f(x)$ — неотрицательная, непрерывная функция на отрезке $[a; b]$, а $F(x)$ — её первообразная на данном отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна разности первообразных конца и начала отрезка:

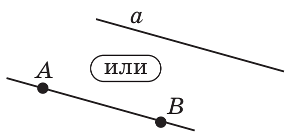
$$S = F(b) - F(a).$$



3. ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)

3.1. Начальные сведения

3.1.1. Точки, прямые, лучи, отрезки

Основные геометрические фигуры на плоскости	
Точка	**Прямая**
	

Взаимное расположение точки и прямой	
$A \in a$  прямая a проходит через точку A	$A \notin a$  прямая a не проходит через точку A

Аксиомы — исходные положения какой-либо теории, принимаемые в рамках данной теории истинными без доказательства.
Теоремы — положения теории, требующие доказательства.

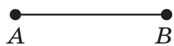
Аксиомы взаимного расположения точек и прямых

- Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.
- Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.
- Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Луч — одна из двух частей прямой, на которые прямую делят лежащие на ней точки.

На рисунке — луч AB и луч AC; точка A — начало лучей AB и AC.

Отрезок — часть прямой, лежащая между двумя точками этой прямой. Эти точки называются концами отрезка.



На рисунке — отрезок AB; точки A и B — концы отрезка AB.

3.1.2. Углы. Вертикальные и смежные углы

Угол — геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки.

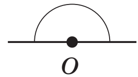
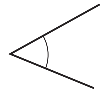
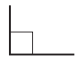
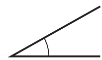
Лучи называют **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**.

Угол обозначают либо через вершину и две точки на сторонах угла, либо только через вершину, либо через лучи. *Например*, $\angle B$, $\angle ABC$ или $\angle hn$.

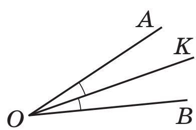
Развёрнутый угол — угол, стороны которого лежат на одной прямой.

Градус — угол, равный $\dfrac{1}{180}$ части развёрнутого угла.

Градусная мера угла — положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле.

Развёрнутый угол	равен 180°	
Неразвёрнутый угол	меньше 180°	
Прямой угол	равен 90°	
Острый угол	меньше 90°	
Тупой угол	больше 90°, но меньше 180°	

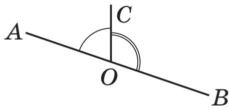
Биссектриса угла — луч, исходящий из вершины угла и делящий его на две равные части.



Свойства биссектрисы угла

- Любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон (или продолжения сторон).
- Любая точка биссектрисы угла, за исключением вершины угла, является центром окружности, касающейся сторон (или продолжений сторон) этого угла.
- Биссектриса угла является осью симметрии самого угла, а также угла, образованного продолжением его сторон.

Смежные углы — два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой.

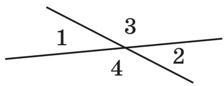


Свойство смежных углов

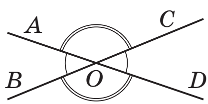
- Сумма смежных углов равна 180°.

Например, пары смежных углов:

$\angle 1 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 1 = 180°$.



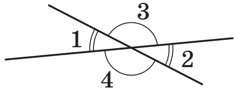
Вертикальные углы — два угла, у которых стороны одного являются продолжениями сторон другого.



Свойство вертикальных углов

- Вертикальные углы равны.

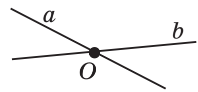
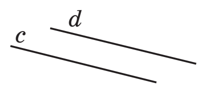
Например, пары вертикальных углов: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.



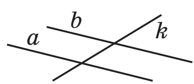
3.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых

Параллельные прямые — прямые на плоскости, не имеющие общей точки.
Параллельность прямых обозначают знаком «$\parallel$».
Например, $a \parallel b$.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

• Две прямые имеют общую точку (пересекаются). $a \cap b = O$	
• Две прямые не имеют общих точек (параллельны). $d \parallel c$	

Секущая прямая по отношению к двум другим прямым — прямая, пересекающая их в двух точках. *Например*, прямая k — секущая прямая к прямым a и b.



Свойства параллельных прямых

1. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (аксиома параллельных прямых).

2. Все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

3. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

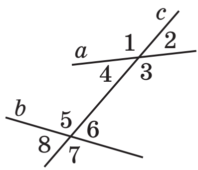
4. Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

5. Если две различные прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны.

6. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

7. Отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными прямыми, равны.

При пересечении двух прямых и секущей образуются 8 углов



$a \cap c$

$b \cap c$

Накрест лежащие углы:
$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$.

Односторонние углы:
$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$.

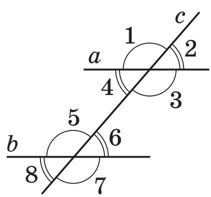
Соответствующие углы:
$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$.

Свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей

1. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то соответственные углы равны.

2. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то накрест лежащие углы равны.

3. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то сумма односторонних углов равна 180°.



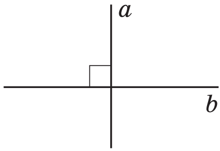
Признаки параллельности прямых

1. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

2. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

3. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Перпендикулярные прямые — две пересекающиеся прямые, которые образуют четыре прямых угла.

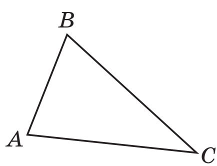


Например, прямые a и b — перпендикулярные: $a \perp b$.

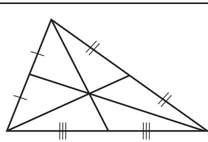
3.2. Треугольник

3.2.1. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника

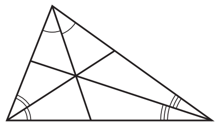
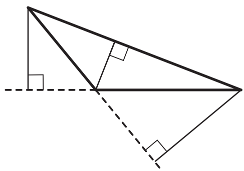
Треугольник — геометрическая фигура, которая состоит из 3-х точек, не лежащих на одной прямой, и 3-х отрезков, соединяющих эти точки попарно.



- Точки A, B, C — **вершины треугольника**;
- отрезки AB, BC, AC — **стороны треугольника**;
- углы A, B, C — **углы треугольника**.



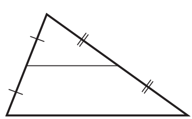
Медиана треугольника — отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

	**Биссектриса треугольника** — отрезок биссектрисы угла треугольника, который соединяет вершину треугольника с точкой противоположной стороны.
	**Высота треугольника** — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

Свойства медианы, биссектрисы, высоты

- В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2 к 1, считая от вершины;
- в любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке;
- в любом треугольнике высоты или их продолжения также пересекаются в одной точке.

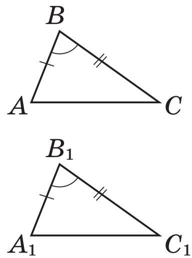
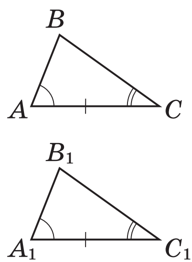
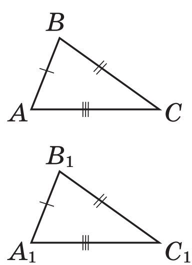
Средняя линия треугольника — отрезок, который соединяет середины двух сторон треугольника.



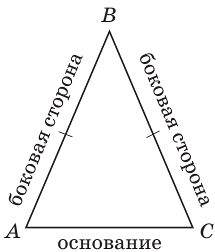
Свойство средней линии треугольника

- Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

3.2.2. Признаки равенства треугольников

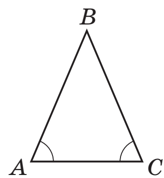
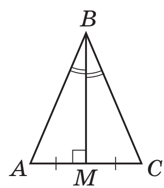
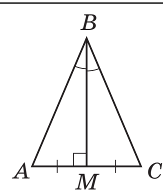
Признаки равенства треугольников	
1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.	
2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	

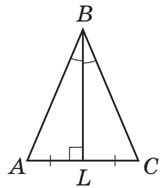
3.2.3. Равнобедренный треугольник. Свойства и признаки равнобедренного треугольника



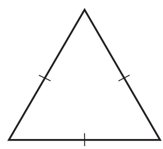
Равнобедренный треугольник — треугольник, у которого две стороны равны.

Равные стороны — **боковые стороны**, третья сторона — **основание треугольника**.

Свойства равнобедренного треугольника	
1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.	
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.	
3. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.	

4. В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.	
5. В равнобедренном треугольнике медианы (а также высоты или биссектрисы), проведённые к боковым сторонам, равны.	

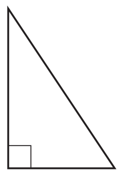
Признак равнобедренного треугольника
Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

Равносторонний треугольник — треугольник, у которого все стороны равны.	

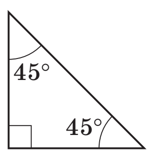
Свойства равностороннего треугольника
1. У равностороннего треугольника все углы равны по $60°$. 2. В равностороннем треугольнике любая биссектриса является одновременно медианой и высотой. 3. В равностороннем треугольнике все медианы (а также высоты или биссектрисы) равны между собой. 4. Точка пересечения медиан (высот, биссектрис) равностороннего треугольника является центром вписанной и описанной окружностей. 5. Все равносторонние треугольники подобны между собой.

3.2.4. Прямоугольный треугольник. Свойства и признаки прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора

Прямоугольный треугольник — треугольник, у которого один из углов прямой, два других — острые.

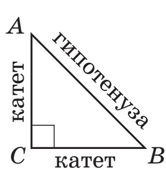


Равнобедренный прямоугольный треугольник — треугольник, у которого два острых угла равны по 45°.



Катеты — две стороны прямоугольного треугольника, лежащие на сторонах прямого угла.

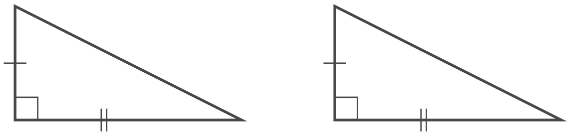
Гипотенуза — сторона прямоугольного треугольника, лежащая напротив прямого угла.



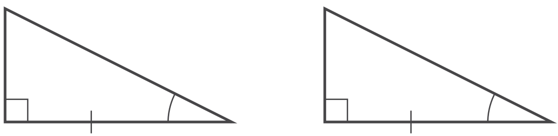
AC и BC — катеты, AB — гипотенуза

Признаки равенства прямоугольных треугольников

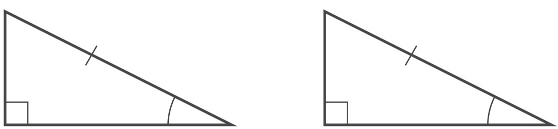
1. По двум катетам



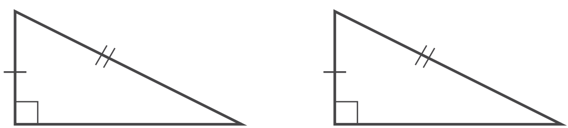
2. По катету и прилежащему к нему острому углу

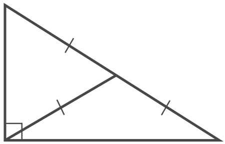
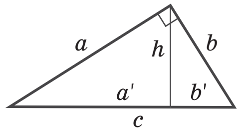


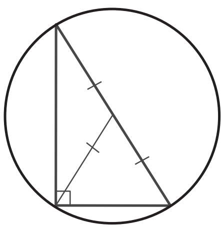
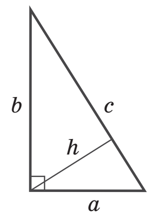
3. По гипотенузе и острому углу



4. По гипотенузе и катету



<table>
<tr>
<td>
Медиана к гипотенузе:
1) равна половине гипотенузы;
2) делит треугольник на два равнобедренных треугольника равной площади.</td>
<td>

Высота h, проведённая к гипотенузе:
1) $h = \sqrt{a'b'} = \dfrac{ab}{c}$;
2) делит треугольник на два подобных ему треугольника.</td>
</tr>
<tr>
<td>
Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.</td>
<td>

Площадь равна:
$S = \dfrac{1}{2}ab$ или $S = \dfrac{1}{2}ch$</td>
</tr>
</table>

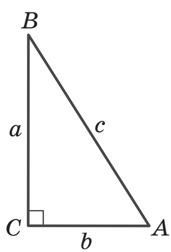
Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
Например, если a и b — катеты, c — гипотенуза, то $a^2 + b^2 = c^2$.

Теорема, обратная теореме Пифагора: если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник является прямоугольным.

Пифагоровы тройки		
3, 4, 5 (египетский треугольник)	$3^2 = 4 + 5$	$3^2 + 4^2 = 5^2$
5, 12, 13	$5^2 = 12 + 13$	$5^2 + 12^2 = 13^2$
7, 24, 25	$7^2 = 24 + 25$	$7^2 + 24^2 = 25^2$
9, 40, 41	$9^2 = 40 + 41$	$9^2 + 40^2 = 41^2$
8, 15, 17		$8^2 + 15^2 = 17^2$

3.2.5. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника



ΔABC;
a и b — катеты;
c — гипотенуза.

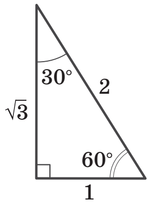
$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$$

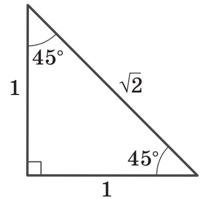
$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс углов 30°, 45°, 60° в прямоугольном треугольнике





$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \cos 60°$$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

$$\mathrm{tg}\, 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{ctg}\, 60°$$

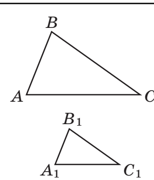
$$\mathrm{tg}\, 45° = 1 = \mathrm{ctg}\, 45°$$

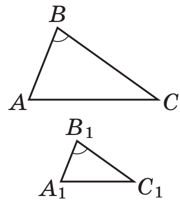
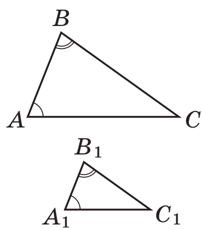
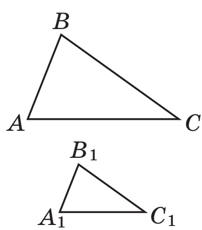
$$\mathrm{tg}\, 60° = \sqrt{3} = \mathrm{ctg}\, 30°$$

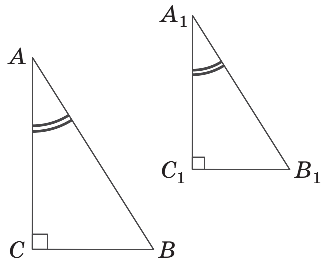
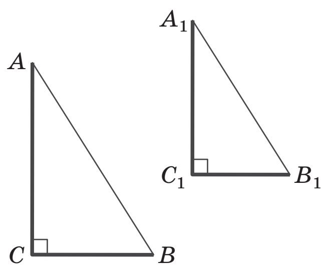
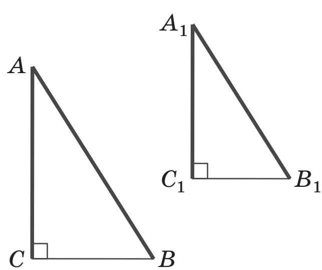
3.2.6. Признаки подобия треугольника

Подобные треугольники — треугольники, у которых соответствующие углы равны, а стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Например,
ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ подобны.
$\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$;
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.



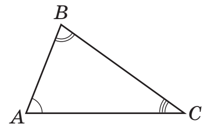
Признаки подобия треугольников	
• по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$; $\angle B = \angle B_1$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	
• по двум углам. $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	
• по трём пропорциональным сторонам. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	

Подобие прямоугольных треугольников	
• по острому углу. $\angle A = \angle A_1$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	
• по двум катетам. $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = k$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	
• по катету и гипотенузе. $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = k$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	

3.2.7. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°.

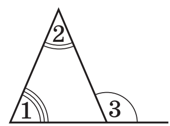
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



Внешний угол треугольника — угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

Свойство внешнего угла треугольника

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

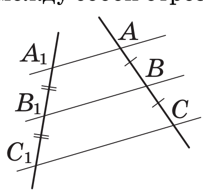


$$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$$

3.2.8. Теорема Фалеса

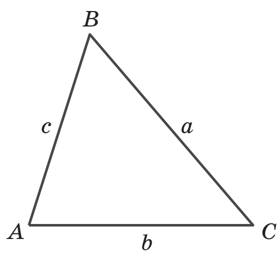
Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



3.2.9. Теорема синусов. Теорема косинусов

Теорема синусов
Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. *Например,* $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$ где a, b и c — длины сторон треугольника; $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — величины соответствующих углов треугольника; R — радиус описанной окружности.

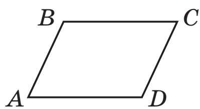
Теорема косинусов
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.  • $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ • $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ • $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

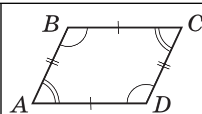
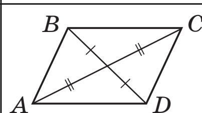
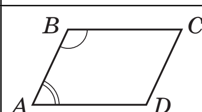
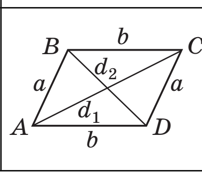
3.3. Многоугольники

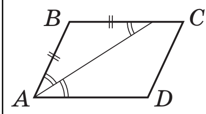
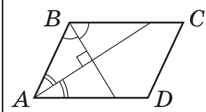
3.3.1. Параллелограмм

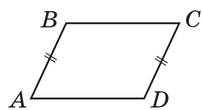
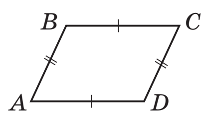
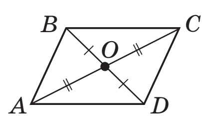
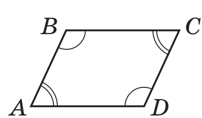
Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны (т. е. лежат на параллельных прямых).

Например, $ABCD$ — параллелограмм, так как $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.



Свойства параллелограмма	
• В параллелограмме противоположные стороны равны, и противоположные углы равны.	
• Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.	
• Сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне, равна 180°.	
• Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.	

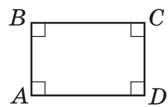
• Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.	
• Биссектрисы углов параллелограмма, прилегающих к одной его стороне, взаимно перпендикулярны.	

Признаки параллелограмма	
• Если две стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. $AB \parallel CD$	
• Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.	
• Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.	
• Если в четырёхугольнике противоположные углы равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.	

3.3.2. Прямоугольник и ромб

Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые.

Например, $ABCD$ — прямоугольник, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.



Свойства прямоугольника

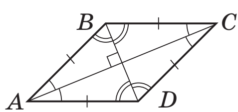
- Диагонали прямоугольника равны.
- Перпендикуляры, проходящие через середины сторон прямоугольника, являются его осями симметрии.

Признаки прямоугольника

- Если диагонали в параллелограмме равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.
- Если в параллелограмме один угол прямой, то это — прямоугольник.

Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны.

Например, $ABCD$ — ромб, $AB = BC = CD = AD$.



Свойства ромба

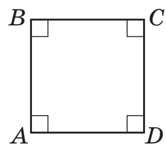
- Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- Диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба.
- Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии.

Признаки ромба

- Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то это — ромб.
- Если диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то это — ромб.
- Если стороны четырехугольника равны, то это — ромб.

3.3.3. Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны.
Например, $ABCD$ — квадрат,
$AB = BC = CD = AD$,
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.



Свойства квадрата

- Все углы квадрата прямые.
- Диагонали квадрата равны.
- Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.
- Диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам.
- Диагонали квадрата делят углы квадрата пополам.
- Квадрат имеет четыре оси симметрии: две диагонали и два перпендикуляра к его сторонам, проходящих через их середины.

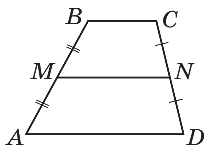
Признаки квадрата

- Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны и равны, то этот параллелограмм — квадрат.
- Если стороны четырёхугольника равны и диагонали также равны, то этот четырёхугольник — квадрат.

3.3.4. Трапеция

Трапеция — четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Например,
$ABCD$ — трапеция, $BC \parallel AD$, $AB \nparallel CD$.



Основания трапеции — её параллельные стороны ($BC \parallel AD$).

Боковые стороны трапеции — её непараллельные стороны ($AB \nparallel CD$).

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины её боковых сторон (MN).

Свойства трапеции

- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
- Сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения её оснований.
- Середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.
- Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен их полуразности.

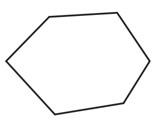
Равнобедренная трапеция — трапеция, боковые стороны которой равны.

Свойства равнобедренной трапеции

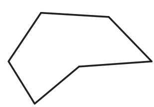
- В равнобедренной трапеции углы при основании равны.
- В равнобедренной трапеции диагонали равны.
- В равнобедренной трапеции высота, опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, другой — полуразности оснований.
- В равнобедренной трапеции прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции.

3.3.5. Сумма углов выпуклого многоугольника

Выпуклый многоугольник — многоугольник, который лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.



Выпуклый многоугольник

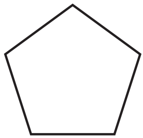
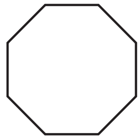


Невыпуклый многоугольник

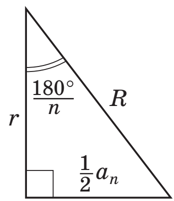
Сумма углов выпуклого n-угольника равна: $(n-2)\cdot 180^\circ$.

3.3.6. Правильные многоугольники

Правильный многоугольник — выпуклый многоугольник, у которого равны все стороны и равны все углы.

Радиусы вписанной и описанной окружностей правильных *n*-угольников (r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, a — сторона, S — площадь).



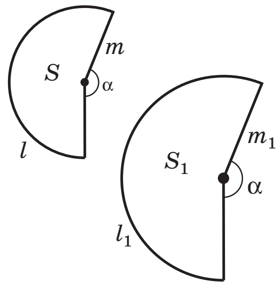
	r	R	S
Треугольник равносторонний	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Квадрат	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a^2
Правильный шестиугольник	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$
n-угольник	$\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$	$\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$	$\frac{a^2 n}{4\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$

3.3.7. Подобие произвольных фигур

Подобие геометрических фигур

Фигура F подобна фигуре F_1 ($F \sim F_1$).
Внутри подобных фигур сохраняются:

- углы $\alpha = \alpha_1$;
- отношения любых длин $\frac{l}{m} = \frac{l_1}{m_1}$;



Между подобными фигурами существуют постоянные:

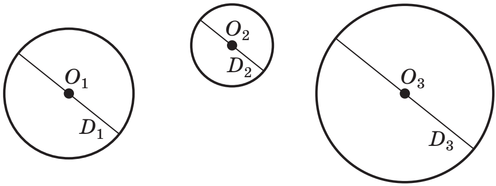
- отношения соответствующих длин $\frac{m_1}{m} = \frac{l_1}{l} = k$ — коэффициент подобия;
- отношения соответствующих площадей $\frac{S_1}{S} = k^2$;
- отношение соответствующих объёмов $\frac{V_1}{V} = k^3$.

Геометрические фигуры, которые подобны всегда:

- все правильные многоугольники. *Например*, равносторонние треугольники, квадраты, правильные шестиугольники;
- окружности, круги;
- правильные многогранники. *Например*, правильные тетраэдры, кубы;
- шары.

Именно с подобием окружностей связано появление числа π.

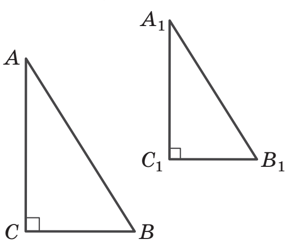
Для любых окружностей (подобных фигур) отношения любых длин сохраняются.



C — длина окружности; D — диаметр окружности.

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2} = \frac{C_3}{D_3} = \pi \approx 3{,}14.$$

Именно с подобием прямоугольных треугольников связано появление тригонометрических функций синуса, косинуса, тангенса и котангенса, так как $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то отношение любых длин постоянны в подобных фигурах.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \sin B = \cos A; \ \frac{CB}{AB} = \frac{C_1B_1}{A_1B_1} = \cos B = \sin A;$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A; \ \frac{CB}{AC} = \frac{C_1B_1}{A_1C_1} = \operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} A.$$

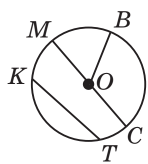
3.4. Окружность и круг

3.4.1. Основные понятия

Окружность — геометрическая фигура, которая состоит из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, центра окружности.

Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью.

Например, на рисунке представлена окружность с центром в точке O, радиусом $R = OB$, диаметром $D = MC$, хордой KT. $D = 2R$.



3.4.2. Вписанный и центральный углы

Дуга окружности — каждая из двух частей окружности, на которые окружность делится двумя точками.

Центральный угол — угол, вершина которого совпадает с центром окружности.

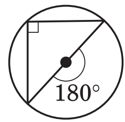
Полуокружность — дуга, концы которой являются концами диаметра окружности.

Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

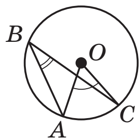
Теорема о вписанном угле
Угол, вписанный в окружность, равен половине дуги, на которую он опирается или половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Следствия к теореме о вписанном угле

- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны;
- вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.



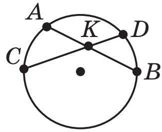
Пример.



$\angle AOC$ — центральный угол; $\angle ABC$ — вписанный угол; $\cup AC$ — дуга; $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$

Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд
Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Например, если AB и CD — хорды окружности, пересекающиеся в точке K, то $AK \cdot BK = CK \cdot DK$.



8.4.3. Касательная и секущая к окружности

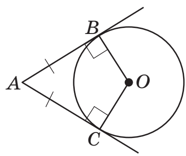
Касательная — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.

Секущая прямая — прямая, которая имеет две общие точки с окружностью.

Точка касания — общая точка касательной и окружности.

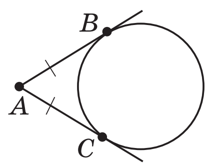
Отрезки касательных — расстояния от точки, из которой проведены две касательные к окружности, до точек касания.

Например, AB и AC — касательные к окружности, тогда отрезки AB и AC — отрезки касательных.



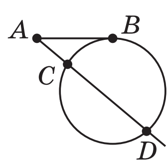
• Отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны:

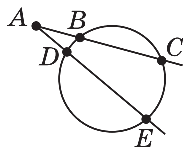
$$AB = AC.$$



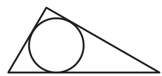
• Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведённой из той же точки:

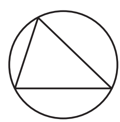
$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

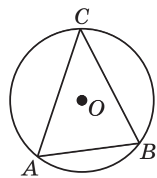
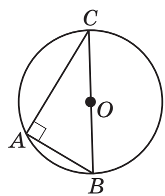
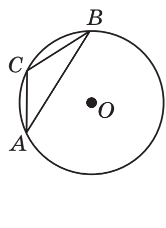


• Произведения отрезков секущих, проведённых из одной точки, равны: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.	

3.4.4. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

Окружность, вписанная в треугольник
Окружность, вписанная в треугольник, касается всех сторон треугольника. 
Центр окружности, вписанной в треугольник, — точка пересечения биссектрис углов треугольника. В любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.

Окружность, описанная около треугольника
Окружность, описанная около треугольника, проходит через все его вершины. 
Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Около любого треугольника можно описать окружность, и только одну.

Центр описанной окружности		
Остроугольный треугольник	Внутри треугольника	
Прямоугольный треугольник	На середине гипотенузы	
Тупоугольный треугольник	Вне треугольника	

3.4.5. Вписанные и описанные четырёхугольники

Вписанные четырёхугольники
Свойство вписанного четырёхугольника
В любом вписанном четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°.
Признак вписанного четырёхугольника
Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность. *Примеры* вписанного четырёхугольника — прямоугольник, равнобедренная трапеция.

Описанные четырёхугольники
Свойство описанного четырёхугольника
В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.
Признак описанного четырёхугольника
Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность. *Пример* описанного четырёхугольника — ромб.

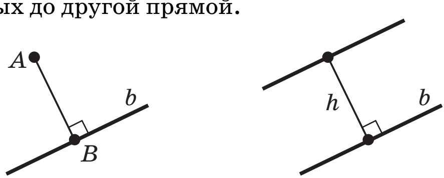
3.5. Измерение геометрических величин

3.5.1. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту прямую — длина отрезка перпендикуляра, проведенного из точки на прямую.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между двумя параллельными прямыми — расстояние от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.



3.5.2. Периметр многоугольников

Периметр *P* многоугольника — сумма длин всех сторон многоугольника.

$$P = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

3.5.3. Длина окружности

Длина окружности *C*

$$C = 2\pi R = \pi D,$$

где R — радиус окружности, D — диаметр окружности, $D = 2R$, $\pi \approx 3{,}14$.

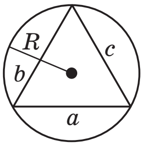
3.5.4. Площадь квадрата, прямоугольника

Площадь квадрата со стороной a	$S = a^2$
Площадь прямоугольника со сторонами a и b	$S = ab$

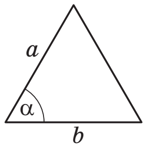
3.5.6. Площадь параллелограмма и ромба, выпуклого четырёхугольника

Площадь параллелограмма	
• Произведение основания на высоту	$S = a \cdot h_a$
• Произведение его смежных сторон на синус угла между ними	$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$
• Половина произведения его диагоналей на синус угла между ними	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$
Площадь ромба	
• Произведение основания на высоту	$S = a \cdot h_a$
• Произведение квадрата его стороны на синус угла между сторонами	$S = a^2 \cdot \sin\alpha$
• Половина произведения его диагоналей	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$
Площадь выпуклого четырёхугольника	
• Половина произведения его диагоналей на синус угла между ними	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$

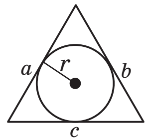
3.5.6. Площадь треугольника



$$S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$$



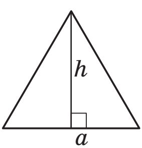
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



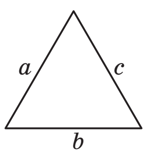
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}Pr$$

$$P = a + b + c$$

Площадь треугольника



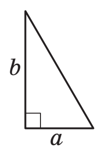
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$$



Формула Герона

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

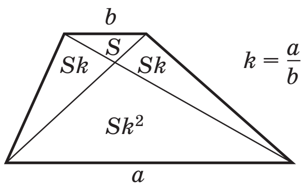


$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab$$

В прямоугольном треугольнике a и b — катеты.

3.5.7. Площадь трапеции

Площадь трапеции	
• Произведение полусуммы её оснований на высоту	$S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$
• Произведение средней линии на её высоту	$S = m \cdot h$
• Половина произведения диагоналей на синус угла между ними	$S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\alpha$



$S\text{тр} = S + 2Sk + Sk^2 = S(1 + 2k + k^2) = S(1 + k)^2$

3.5.8. Площадь круга. Площадь сектора

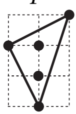
Площадь круга	
Произведение числа π на квадрат радиуса круга.	$S = \pi R^2$ $\pi \approx 3{,}14.$
Площадь кругового сектора	
Произведение отношения градусной меры дуги окружности к 360 °и площади круга.	$S = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha,$ где α — градусная мера дуги; R — радиус окружности.

3.5.9. Формула Пика для нахождения площади многоугольников на клетчатой бумаге

$S = \text{В} + \frac{\text{Г}}{2} - 1$, где

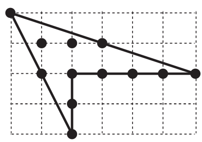
S — площадь многоугольника;
В — количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника;
Г — количество узлов сетки, лежащих на границе многоугольника.

Примеры:

1) 

В = 2, Г = 3,

$S = 2 + \frac{3}{2} - 1 = 2{,}5.$

2) 

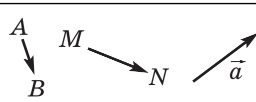
В = 2, Г = 10,

$S = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6.$

3.6. Векторы на плоскости

3.6.1. Вектор, длина вектора, равенство векторов

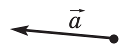
Вектор — направленный отрезок, т. е. отрезок, у которого одна из крайних точек называется началом, а другая — концом.



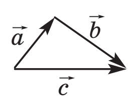
Обозначение вектора — две заглавные латинские буквы или одна строчная латинская буква со стрелкой над ними. *Например*: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\vec{a}$.

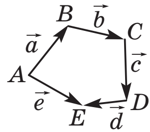
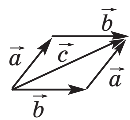
Нулевой вектор — вектор, у которого начало совпадает с концом. Обозначается: $\vec{0}$ или $\overrightarrow{MM}$, $\overrightarrow{AA}$ и т.п.

Длина ненулевого вектора (абсолютная величина или **модуль вектора)** — длина отрезка, которым изображается данный вектор. Длину нулевого вектора считают равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

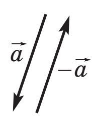
Равные векторы — сонаправленные векторы, одинаковой длины.	
Вектор, отложенный от точки, — вектор, началом которого является данная точка.	
• От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и только один. • Равные векторы можно откладывать от разных точек, считать их одним и тем же вектором и обозначать одной буквой.	

3.6.2. Операции над векторами

Правила сложения векторов	
• Правило треугольника для сложения двух векторов состоит в том, что второй вектор откладывают от конца первого и считают суммой вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом второго вектора.	*Например,* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ 

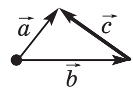
• Правило многоугольника для сложения нескольких векторов состоит в том, что складываемые вектора откладывают таким образом, чтобы каждый следующий вектор начинался от конца предыдущего. Тогда суммой всех данных векторов будет вектор, который начинается от начала первого вектора и соединяет его с концом последнего.	*Например*, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{e}$ 
• Правило параллелограмма для сложения двух неколлинеарных векторов состоит в том, что оба вектора откладывают от одной точки, полученную фигуру достраивают до параллелограмма, используя данные вектора как стороны параллелограмма. Искомой суммой будет вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма и имеющий началом ту же точку, что и слагаемые.	*Например*, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 

Законы сложения векторов	
Переместительный закон	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
Сочетательный закон	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

Противоположные векторы — векторы, имеющие одинаковые длины и противоположно направленные. Записывают так: $\vec{a}$ и $-\vec{a}$, причём $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.	

Разность двух векторов — вектор, который в сумме с вычитаемым вектором даёт уменьшаемый вектор.

Например, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



Теорема о разности векторов

Равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ справедливо для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Правила вычитания векторов

- Для того чтобы вычесть из одного вектора другой, надо к первому вектору прибавить вектор, противоположный второму.
- Для того чтобы вычесть из одного вектора другой, надо из произвольной точки плоскости отложить оба вектора, затем построить вектор, который начинается на конце второго вектора (вычитаемого), а заканчивается на конце первого вектора (уменьшаемого).

Произведение векторов

Произведение ненулевого вектора на число — вектор, который сонаправлен с данным, если число положительное, и противоположно направлен к данному вектору, если число отрицательное. Длина искомого вектора равна произведению модуля числа на длину данного вектора.

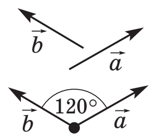
Произведение нулевого вектора на любое число — нулевой вектор.

Произведение числа нуль на любой вектор — нулевой вектор.

Законы умножения вектора на число	
Сочетательный закон	$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$
Распределительный закон	$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

3.6.3. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Угол между векторами — угол, который образуется, если отложить оба вектора от одной точки. Сторонами искомого угла будут лучи, содержащие данные векторы.

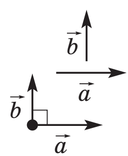


Угол между векторами обозначают:

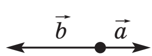
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} \text{ или } \angle(\vec{a}\,\vec{b}).$$

Перпендикулярные векторы — векторы, угол между которыми равен 90°.

Обозначают как: $\vec{a} \perp \vec{b}$.



- Если векторы сонаправлены, в том числе оба или только один из них нулевой, то угол между этими векторами считается равным 0°.
- Если векторы противоположно направлены, то угол между ними — 180°.



Скалярное произведение двух векторов — произведение длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert \cos \angle(\vec{a}\ \vec{b})$.
Свойства скалярного произведения двух векторов
• Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, так как $\cos 90° = 0$; • если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$; • если $\angle(\vec{a} \cdot \vec{b}) > 90°$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$; • если $\angle(\vec{a} \cdot \vec{b}) < 90°$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$; • если $\angle(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert$.
Скалярное произведение в координатах $\vec{a}\{x_1; y_1\},\ \vec{b}\{x_2; y_2\};\ \vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$
Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины $\vec{a}^{\,2} = \lvert \vec{a} \rvert^2$

Свойства скалярного произведения вектора	
Переместительный закон	$\vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{m}$
Сочетательный закон	$(k\vec{m})\vec{n} = k(\vec{m}\,\vec{n})$
Распределительный закон	$\vec{p}\,(\vec{m} + \vec{n}) = \vec{p}\,\vec{m} + \vec{p}\,\vec{n}$

3.6.4 Простейшие задачи в координатах

Координаты середины отрезка $C(x; y)$ — середины отрезка AB, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ вычисляют по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Длина вектора $\vec{a}\{x; y\}$ вычисляется по формуле:

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Расстояние d между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в пространстве находят по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

3.6.5. Уравнение окружности

- Уравнение окружности с центром в точке $O(a; b)$ и радиусом R имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
- Уравнение окружности с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом R имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

3.7. Дополнительные материалы к главе 3

3.7.1. Использование подобия треугольников при решении задач

Примеры:

1. В треугольнике ABC угол $\angle C = 90°$, $AC = 8$, $\operatorname{tg} A = \frac{21}{2\sqrt{2}}$.

Найти: AB.

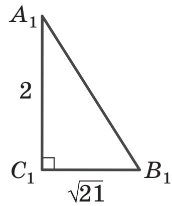
Решение. Упростим тангенс:

$\operatorname{tg} A = \dfrac{21}{2\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Теперь построим:

$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

По теореме Пифагора найдём A_1B_1:



$A_1B_1 = \sqrt{2^2 + 21} = 5$; $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$; $\dfrac{8}{2} = \dfrac{AB}{5}$; $AB = 20$.

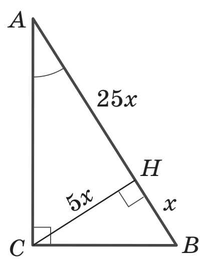
Ответ: 20.

2. В треугольнике ABC угол $\angle C = 90°$, $CH \perp AB$, $AB = B$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{1}{5}$.

Найти: AH.

Решение.

1) Обозначим $HB = x$,
тогда $CH = 5HB = 5x$, так как
$\angle HCB = \angle CA$; $\operatorname{tg} HCB = \dfrac{1}{5}$;
$\Delta HCB \sim \Delta CAB$ по острому углу;
$\angle$B — общий.



2) В ΔACH:

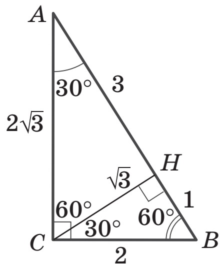
$CH = 5x$, тогда $AH = 25x$, так как $\operatorname{tg} CAH = \dfrac{1}{5}$.

3) $AH = 25x$; $HB = x$; $AB = 26x = 13$; $x = \dfrac{1}{2}$;

$AH = 25x = \dfrac{25}{2} = 12{,}5$.

Ответ: 12,5.

Секреты ЕГЭ



• Соотношение отрезков в прямоугольных треугольниках с острым углом 30° и 60°:

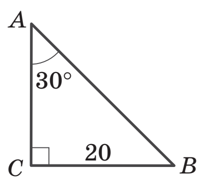
1) $HB = 1$, $CB = 2$, $CH = \sqrt{3}$ из ΔCHB;

2) $CH = \sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{3}$, $AH = 3$ из ΔACH;

3) $CB = 2$, $AB = 4$, $AC = 2\sqrt{3}$ из ΔABC.

Катет, лежащий против угла 30° равен половине гипотенузы и в $\sqrt{3}$ раз меньше второго катета.

Например,



$BC = 20$, тогда $AB = 40$, $AC = 20\sqrt{3}$.

• Формула радиуса вписанной окружности r в прямоугольном треугольнике:

$r = \dfrac{a + b - c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

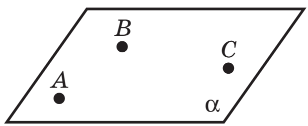
4. ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)

4.1. Прямые и плоскости в пространстве

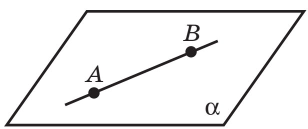
4.1.1. Основные аксиомы стереометрии и следствия к ним

Аксиомы стереометрии

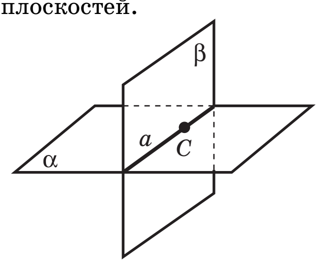
• Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



• Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

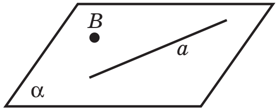


• Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

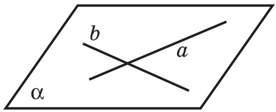


Следствия из аксиом

• Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

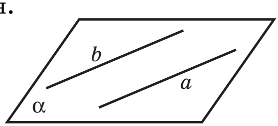


• Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

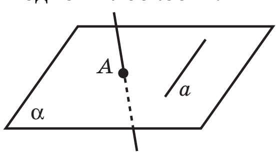


4.1.2. Взаимное расположение прямых в пространстве

• **Параллельные прямые** — две прямые в пространстве, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются.

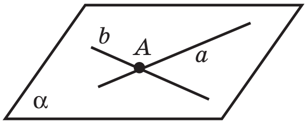


• **Скрещивающиеся прямые** — две прямые, которые не лежат в одной плоскости.



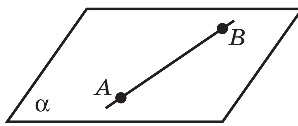
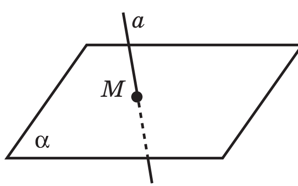
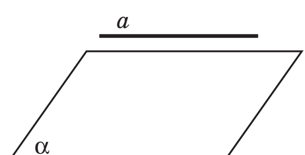
• Если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

- **Пересекающиеся прямые** — две различные прямые, которые имеют общую точку и лежат в одной плоскости.



Перпендикулярные прямые в пространстве — две пересекающиеся или скрещивающиеся прямые, угол между которыми равен 90°. Обозначаются: $a \perp b$.

4.1.3. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

<table>
<tr><th colspan="2">Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве</th></tr>
<tr><td>• прямая лежит в плоскости;</td><td>
</td></tr>
<tr><td>• прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т.е. пересекаются;</td><td>
</td></tr>
<tr><td>• прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.</td><td>
</td></tr>
</table>

Прямую и плоскость называют параллельными, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости

• Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этот плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Свойства параллельных прямой и плоскости

• Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

• Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

• Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

• Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

• Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

• **Перпендикуляр к плоскости** — отрезок прямой, которая перпендикулярна плоскости, имеющий концом точку пересечения прямой и плоскости.

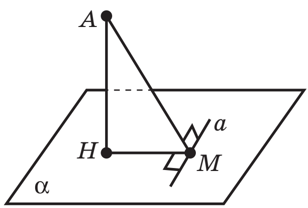
• **Основание перпендикуляра** — конец перпендикуляра, лежащий на плоскости.

• **Наклонная к плоскости** — отрезок, соединяющий точку A вне плоскости с точкой M лежащей на плоскости, но не совпадающий с основанием перпендикуляра из точки A к этой плоскости.

• **Основание наклонной** — точка M лежащая в плоскости.

Теорема о трёх перпендикулярах

• Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



$AH \perp \alpha$

AM — наклонная,

HM – проекция наклонной на α.

Теорема обратная теореме о трёх перпендикулярах

• Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

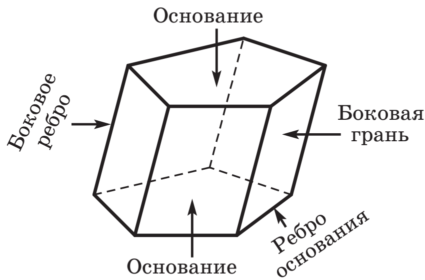
4.1.4. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

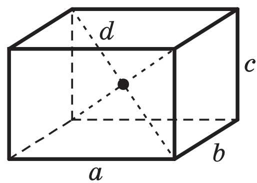
Параллельные плоскости — плоскости, не имеющие общих точек.
Признак параллельности двух плоскостей
• Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
Свойства параллельных плоскостей
• Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.   • Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

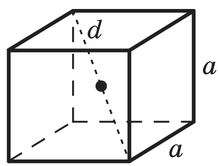
Перпендикулярные плоскости — две пересекающиеся плоскости, угол между которыми равен $90°$.
Признак перпендикулярности плоскостей
• Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.
Свойство перпендикулярности плоскостей
• Плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

4.2. Многогранники

4.2.1. Призма, параллелепипед, куб

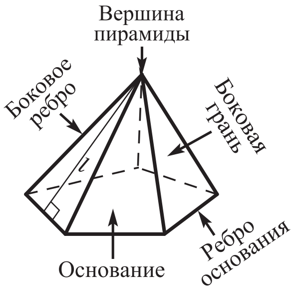
Призма
Призма — многогранник, две грани которого — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммы.  **Основания призмы** — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях. **Боковые рёбра** — рёбра, не лежащие на основаниях. Все боковые рёбра параллельны между собой. **Высота призмы** — перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания. **Прямая призма** — призма, боковые рёбра которой перпендикулярны плоскостям оснований. **Боковые грани** прямой призмы — прямоугольники. **Высота** прямой призмы равна боковому ребру. **Правильная призма** — прямая призма, основания которой являются правильными многоугольниками.

Параллелепипед
Параллелепипед — призма, основания которой — параллелограммы.  **Прямоугольный параллелепипед** — параллелепипед, у которого боковые рёбра перпендикулярны основаниям, а основания являются прямоугольниками. Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны. **Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда** равен сумме квадратов трёх измерений ($d^2 = a^2 + b^2 + c^2$).

Куб
Куб — прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны.  Все грани — квадраты. **Квадрат диагонали куба** равен квадрату трёх его сторон ($d^2 = 3a^2$).

4.2.2. Пирамида

Пирамида
Пирамида — многогранник, составленный из n-угольника и n-треугольников, при этом n-угольник считают основанием пирамиды, а треугольник — боковыми гранями.



Основание пирамиды — многоугольники.

Боковые грани — треугольники с общей вершиной.

Боковые рёбра — стороны боковых граней, не лежащие в основании пирамиды.

Высота — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость ее основания.

Апофема l — высота боковой грани.

Правильная пирамида — пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проектируется в центр основания. Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Все боковые рёбра равны. Все апофемы равны. **Тетраэдр** — это треугольная пирамида. У правильного тетраэдра все грани — равносторонние треугольники.

4.2.3. Сечение многогранника

Сечение многогранника — многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника.

Например, тетраэдр имеет четыре грани — его сечением могут быть только треугольники и четырёхугольники; параллелепипед имеет шесть граней — его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники.

Пример.

Дано: $SABC$ — пирамида, $O \in AB$, $F \in SB$, $D \in AC$.

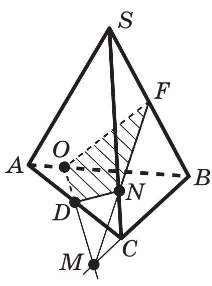
Построить: сечение пирамиды плоскостью OFD.

Решение:

1) $OD \cap BC = M$;

2) $MF \cap SC = N$;

3) $OFND$ — искомое сечение.

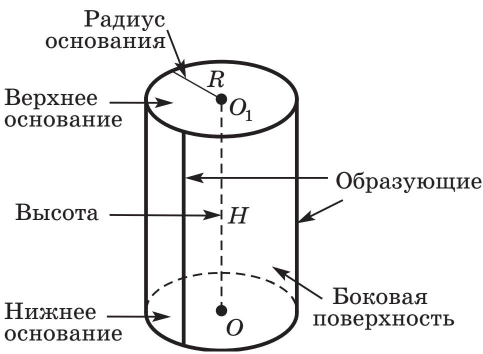


4.3. Тела вращения

4.3.1. Цилиндр

Цилиндр

Цилиндр (прямой круговой цилиндр) — тело, которое получают в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон.



Ось цилиндра — ось вращения, которая является его осью симметрии.

Цилиндр состоит из двух оснований (кругов) и боковой поверхности (развёртка — прямоугольник).

Высота цилиндра *h* — отрезок, соединяющий точки на основаниях, и перпендикулярный плоскостям оснований.

Образующая цилиндра *l* — отрезок, соединяющий точки окружностей оснований, и перпендикулярный плоскостям оснований.

Высота цилиндра равна его образующей l.

Боковая поверхность состоит из образующих.
Её площадь равна произведению сторон: длины $2\pi R$ (R — радиус оснований) и ширины h (высота):

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$$

Осевое сечение цилиндра — сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра и является прямоугольником. Две стороны прямоугольника — образующие цилиндра, а две другие — диаметры его оснований.

Круговое сечение цилиндра — сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра. Круговое сечение является кругом, равным основаниям цилиндра.

4.3.2. Конус

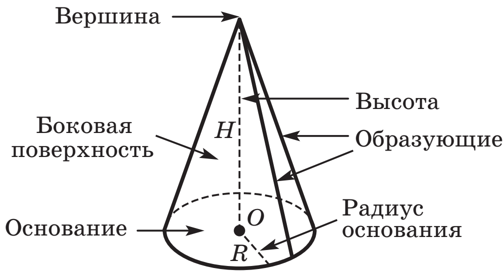
Конус

Конус (прямой круговой конус) — тело, которое получают в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Ось конуса — ось вращения, которая является его осью симметрии.

Конус состоит из основания (круг радиусом R) и боковой поверхности.

Высота конуса h — отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания.



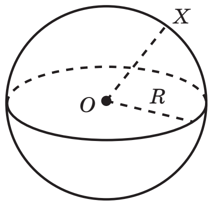
Образующая конуса l — отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания.

Осевое сечение конуса — сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса и являющееся равнобедренным треугольником, боковые стороны которого — это образующие конуса, а основание — диаметр основания конуса.

Круговое сечение конуса — сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса и являющееся кругом с центром, расположенном на оси конуса.

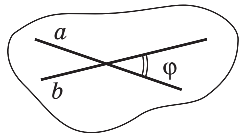
Развёртка боковой поверхности конуса — круговой сектор, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.

4.3.3. Шар и сфера

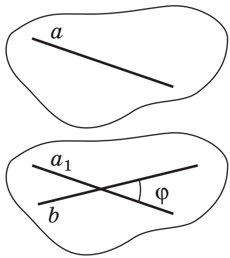
Шар и сфера
Сфера — это множество точек, удалённых от данной точки (центра сферы) на одинаковое расстояние (равное радиусу сферы). **Шар** — это множество точек, удалённых от данной точки (центр шара) на расстояние, не большее заданного (радиус шара). 

4.4. Измерение геометрических величин в пространстве

4.4.1. Угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями

Угол между прямыми в пространстве	
Угол между пересекающимися прямыми — наименьший из углов, образованных при пересечении этих прямых (если при пересечении образовались четыре равных угла, то прямые перпендикулярны).	

Угол между скрещивающимися прямыми — угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.



• Если a и b — скрещиваются,
то $\angle(a, b) = \angle(a_1, b) = \varphi$, где $a_1 \parallel a$.

Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней — это угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях.

4.4.2. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми. Расстояние между параллельными плоскостями

Расстояние от точки до плоскости — длина перпендикуляра, проведённого из данной точки к этой плоскости.

Расстояние между параллельными плоскостями — расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости. **Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью** — расстояние от произвольной точки прямой до плоскости. **Расстояние между скрещивающимися прямыми** — расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую, параллельно первой.

4.4.3. Площадь поверхности многогранника

Площадь поверхности куба	$S = 6a^2$
Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда	$S = 2(ab + bc + ac)$
Площадь боковой поверхности призмы	$S = P_{осн} h$
Площадь полной поверхности призмы	$S = 2S_{осн} + P_{осн} h$
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды	$S = \frac{1}{2} P_{осн}\, l$, где l — апофема
Площадь полной поверхности пирамиды	$S = S_{осн} + S_{бок}$

4.4.4. Площадь поверхности фигур вращения

Площадь боковой поверхности конуса	$S = \pi R l$, где l — образующая
Площадь полной поверхности конуса	$S = \pi R^2 + \pi R l$
Площадь боковой поверхности цилиндра	$S = 2\pi R h$, где h — высота
Площадь полной поверхности цилиндра	$S = 2\pi R^2 + 2\pi R h$
Площадь поверхности сферы	$S = 4\pi R^2$

4.4.5. Объёмы

Куб	$V = a^3$
Прямоугольный параллелепипед	$V = abc$
Параллелепипед, призма, цилиндр	$V = S_{\text{осн}} h$, где h — высота
Пирамида, конус	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$, где h — высота
Шар	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

4.5. Координаты и векторы в пространстве

4.5.1. Декартовы координаты в пространстве. Координаты вектора

Прямоугольная система координат в пространстве — три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, на которых выбраны направление и единица измерения отрезков, которые лежат в трёх разных плоскостях xy, yz, xz и имеют общую точку пересечения O.

Оси координат — прямые x, y, z с выбранными на них направлениями.

Начало координат — точка их пересечения O.

Оси координат в пространстве обозначают Ox, Oy, Oz (соответственно ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат).

Координатные векторы — единичные векторы, направление которых совпадает с положительным направлением координатных осей.

Вектор $\vec{i}$ совпадает по направлению с осью абсцисс, вектор $\vec{j}$ совпадает по направлению с осью ординат, вектор $\vec{k}$ — с осью аппликат.

Любой вектор $\vec{c}$ можно разложить по координатным векторам: $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

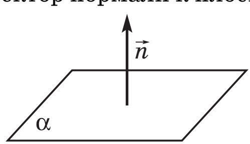
Координаты вектора $\vec{c}$ в данной системе координат — коэффициенты разложения x, y и z, которые определяются единственным образом: $\vec{c}\{x; y; \mathrm{z}\}$.

4.5.2. Скалярное произведение векторов в пространстве. Угол между векторами в пространстве

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ в координатах находится по формуле: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
Косинус угла α **между ненулевыми векторами** $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ вычисляется по формуле: $$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$ **Угол между векторами** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ — угол, который получается, если отложить от произвольной точки M векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$; в этом случае лучи MA и MB образуют искомый угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4.5.3. Уравнение плоскости

Уравнение плоскости в прямоугольной системе координат
$Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости α в общем виде. $\vec{n}\{A; B; C\}$ — вектор нормали к плоскости. $\vec{n} \perp \alpha$.



2 способа нахождения уравнения плоскости:

1) Любая плоскость проходит через 3 точки, не лежащие на одной прямой. Чтобы найти A, B, C, D, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0; \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0; \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0, \end{cases}$$

где даны координаты 3 точек $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$.

Все коэффициенты A, B, C, D выражают через один из них, так как уравнение плоскости не меняется при умножении левой и правой части на одно и то же число, не равное нулю.

2) Так как в уравнении плоскости:

$Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{n}\{A; B; C\}$ можно найти коэффициенты A, B и C с помощью нахождения координат вектора нормали.

Если вектор $\vec{m}\{x_1; y_1; z_1\} \subset \alpha$, и вектор $\vec{p}\{x_2; y_2; z_2\} \subset \subset \alpha$, при этом $\vec{m} \nparallel \vec{p}$ и $\vec{m} \neq \vec{p}$, то так как $\vec{n} \perp \alpha$, то $\vec{n} \perp \vec{m}$ и $\vec{n} \perp \vec{p}$ следовательно $\vec{n}\vec{m} = 0$ и $\vec{n}\vec{p} = 0$.

Составим систему из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0; \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0, \end{cases}$$

Коэффициенты A, B, C (координаты вектора нормали) выражаем через один из них.

Для записи уравнения плоскости используем полученные коэффициенты A, B, C. Коэффициент D берём произвольно и получаем уравнение плоскости, параллельное искомой.

Если для дальнейших вычислений нужна конкретная плоскость (измерение расстояний или площадей), то берём координаты любой точки искомой плоскости, подставляем в уравнение x, y, z и находим коэффициент D.

1) Угол между прямой и плоскостью.

• Берём вектор на прямой $\vec{s}\{x;\ y;\ z\}$ и вектор нормали к плоскости $\vec{n}\{A;\ B;\ C\}$.

• Находим модуль косинуса угла между векторами используя формулу скалярного произведения векторов.

• $\cos \widehat{\vec{n}\ \vec{s}} = \dfrac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

• Тогда синус угла между прямой и плоскостью равен косинусу угла между векторами:

• $\sin \alpha = \cos \widehat{\vec{n}\ \vec{s}}$, где α — искомый угол.

2) Угол между плоскостями.

• Берём два вектора нормали для каждой из плоскостей $\vec{n}_1\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$.

• Находим модуль косинуса угла между этими векторами:

• $\cos \widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2} = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$

3) Расстояние от точки до плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

4.5.4. Простейшие задачи в координатах в пространстве

Координаты середины отрезка $C(x;\ y;\ z)$ — середины отрезка AB, где $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляют по формулам $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Длина вектора $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Расстояние d **между двумя точками** $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ в пространстве находят по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1. Элементы статистки

Среднее арифметическое нескольких чисел — частное от деления этих чисел на число слагаемых.

Например, найдём среднее арифметическое чисел: 21, 46, 50.
$(21 + 46 + 50) : 3 = 39$.

Медиана нескольких чисел — число, стоящее посередине данных чисел, выписанных в порядке возрастания.
Если количество чисел чётное, то медианой будет среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.

Например:

1) Найдём медиану чисел: 5, 3, 2, 5, 4.

Решение. Запишем эти числа по возрастанию: 2, 3, 4, 5, 5. Медиана равна 4.
Ответ: 4.

2) Найдём медиану чисел: 3, 4, 4, 5, 5, 5.
Решение. $(4 + 5) : 2 = 4{,}5$.
Ответ: 4,5.

Размах нескольких чисел — разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Мода нескольких чисел — число, которое встречается чаще других.

5.2. Элементы комбинаторики

5.2.1. Основные формулы комбинаторики

Основные формулы комбинаторики	
Факториал	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Число перестановок из n элементов	$P_n = A_n^n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Число перестановок с повторениями из n элементов, из которых k — одинаковые	$\overline{P_n}(k) = \dfrac{n!}{k!}$
Число перестановок с повторениями из n элементов, из которых k_1, k_2, ..., k_m — одинаковые	$\overline{P_n}(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$
Число размещений из n элементов по k элементов	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \times (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
Число размещений с повторениями из n элементов по k элементов	$\overline{A_n^k} = n^k$
Число сочетаний из n элементов по k элементов	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов	$\overline{C_n^k} = C_{(k+n-1)}^k$
Формула, связывающая размещения, сочетания и перестановки	$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$

5.3. Элементы теории вероятностей

5.3.1. Вероятности событий. Классическое определение вероятности

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности случайных событий и случайных величин при массовом их появлении.

Опыт (испытание) — действие, которое можно повторять большое число раз в одинаковых условиях и результат которого нельзя предугадать заранее.

Относительная частота случайного события к серии испытаний — отношение числа испытаний, в которых наступило это событие, к числу всех испытаний.

Классическая вероятность — вероятность события в испытании с равновозможными исходами, которая равно отношению благоприятного количества исходов для данного события к числу всех равновозможных исходов.

События

Случайное	Достоверное	Невозможное
Может произойти, а может и не произойти в данном опыте	Обязательно произойдёт в данном опыте	Не может произойти в данном опыте
$0 < P(A) < 1$	$P(A) = 1$	$P(A) = 0$

5.3.1. Теорема о вероятности событий

Теорема сложения

Несовместные события	Совместные события
$P(A + B) = P(A) + P(B)$	$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
A, B — полная группа $P(A) + P(B) = 1$ $P(A) + P(\bar{A}) = 1$	Вероятность наступления хотя бы одного события $P(A + B) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$

Теорема умножения	
Независимые события	**Зависимые события**
$P(AB) = P(A)P(B)$	$P(AB) = P(A)P_A(B)$

Повторные независимые испытания
Формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где C_n^k — число сочетаний, p — вероятность успеха, q — вероятность неудачи, n — число независимых испытаний, k — количество выпавших событий, $q = 1 - p$, n, k — достаточно малы.

$\overline{A}$ — событие, противоположное событию A.

$P_A(B)$ — условная вероятность, т. е. вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A уже произошло.

6. ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

6.1. Банковские задачи

Кредиты с аннуитетными платежами
A — кредит; $r\,\% = \frac{r}{100}$ — процент по кредиту; n — количество лет (месяцев); $k = 1 + \frac{r}{100}$; x — ежегодные (ежемесячные) платежи — постоянные; A_k — остатки на k-й месяц; S_n — сумма выплат. *Решение.* $A_1 = Ak - x$; $A_2 = Ak^2 - xk - x = Ak^2 - x(k+1)$; $A_3 = Ak^3 - xk^2 - xk - x = Ak^3 - x(k^2 + k + 1)$; $A_4 = Ak^4 - xk^3 - xk^2 - xk - x =$ $= Ak^4 - x(k^3 + k^2 + k + 1) =$ $= Ak^4 - x(k+1)(k^2+1)$; $S_4 = 4x$; $S_n = nx$.

Кредиты с дифференцированными платежами

A — кредит;

$r\,\% = \dfrac{r}{100} = p$ — процент по кредиту;

n — число лет (месяцев) ;

S_n — общая сумма выплат;

A_k — остаток на k-й год;

Каждый год (месяц) кредит уменьшается на одну и ту же сумму.

Решение.

Выплаты	Остатки
$x_1 = \dfrac{A}{n} + Ap$	$A_1 = A - \dfrac{A}{n}$
$x_2 = \dfrac{A}{n} + \left(A - \dfrac{A}{n}\right)p = \dfrac{A}{n} + Ap - \dfrac{Ap}{n}$	$A_2 = A - \dfrac{2A}{n}$
$x_3 = \dfrac{A}{n} + \left(A - \dfrac{2A}{n}\right)p = \dfrac{A}{n} + Ap - \dfrac{2Ap}{n}$	$A_3 = A - \dfrac{3A}{n}$
$x_n = \dfrac{A}{n} + \left(A - \dfrac{(n-1)A}{n}\right)p = \dfrac{A}{n} + Ap - \dfrac{(n-1)Ap}{n}$	$A_n = 0$

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$S_n = \dfrac{x_1 + x_n}{2}$, где x_n — арифметическая прогрессия;

$$S_n = A + Apn - \frac{(n-1)Ap}{n} \cdot \frac{n}{2} =$$

$$= A + Apn - \frac{(n-1)Ap}{2} = A + Ap\left(n - \frac{(n-1)}{2}\right) =$$

$$= A + Ap\frac{(n+1)}{2}.$$

Справочное издание

12+

Лев Иосифович Слонимский,
Ирина Семёновна Слонимская

**МАТЕМАТИКА В ТАБЛИЦАХ И СХЕМАХ
для подготовки к ЕГЭ**

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *Н. А. Шармай*
Технический редактор *Е. П. Кудиярова*
Корректор *О. Б. Маргевич*
Компьютерная вёрстка *С. А. Смоленского*

ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ ЕГЭ

Справочник содержит материал по всем разделам и темам курса математики, проверяемым на едином государственном экзамене: «Алгебра», «Элементы математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятности», «Финансовая математика», – и соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту «ФГОС» среднего (общего) образования.

Наглядность и доступность табличной формы подачи материала позволяет его легко и быстро обобщить, систематизировать и повторить.

Книга будет полезна при подготовке к урокам, контрольным работам, промежуточной аттестации, а также для подготовки к единому государственному экзамену.

Авторы книги – Лев Иосифович Слонимский и Ирина Семёновна Слонимская – опытные учителя-практики, создатели многих популярных учебных пособий по математике, в том числе для подготовки к ЕГЭ и ОГЭ.